# Intelligence Artificielle Connexionniste

# Descente de gradient

Julien SEINTURIER
Maître de Conférences

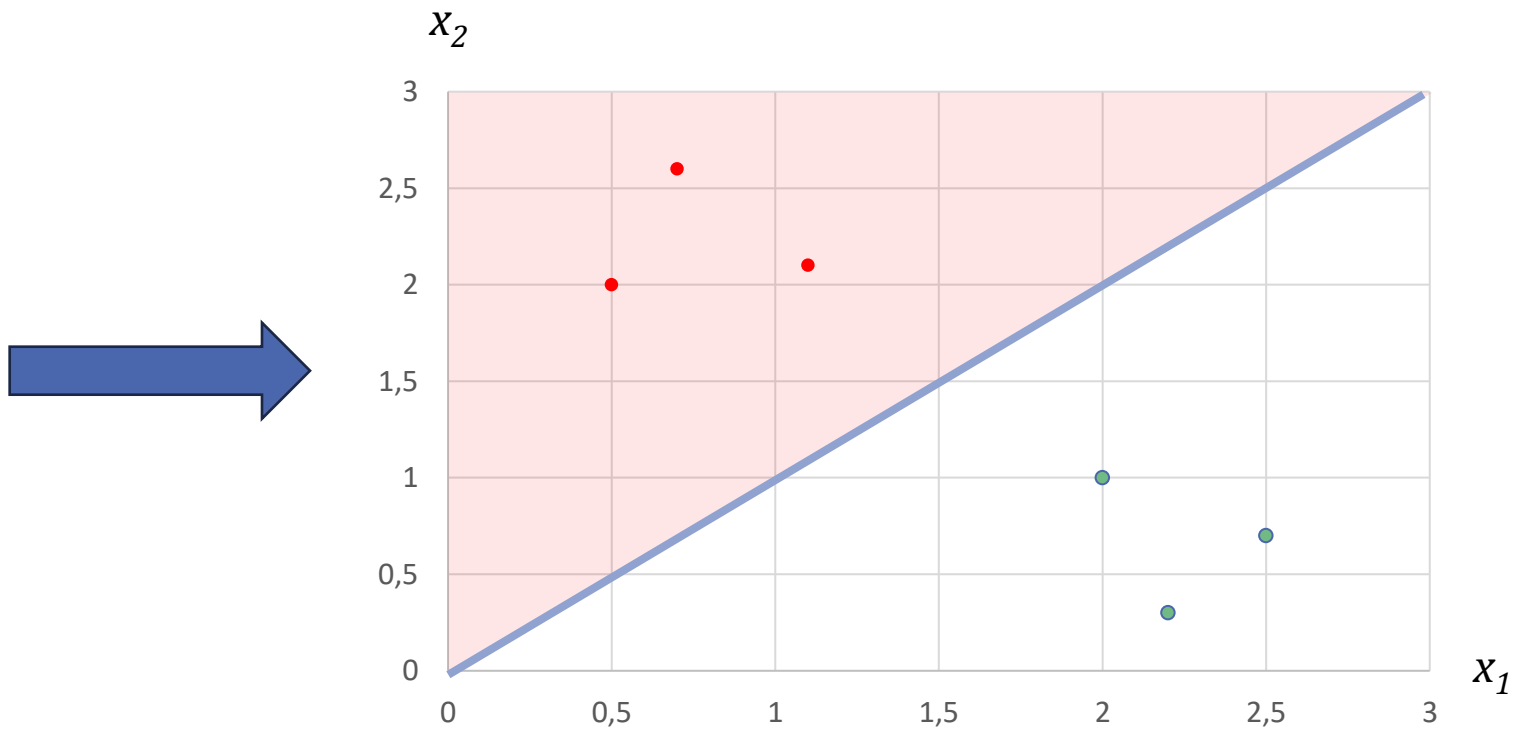
Université de Toulon
julien.seinturier@univ-tln.fr
https://web.seinturier.fr/teaching

©2026 / 2027

# Classification binaire linéaire

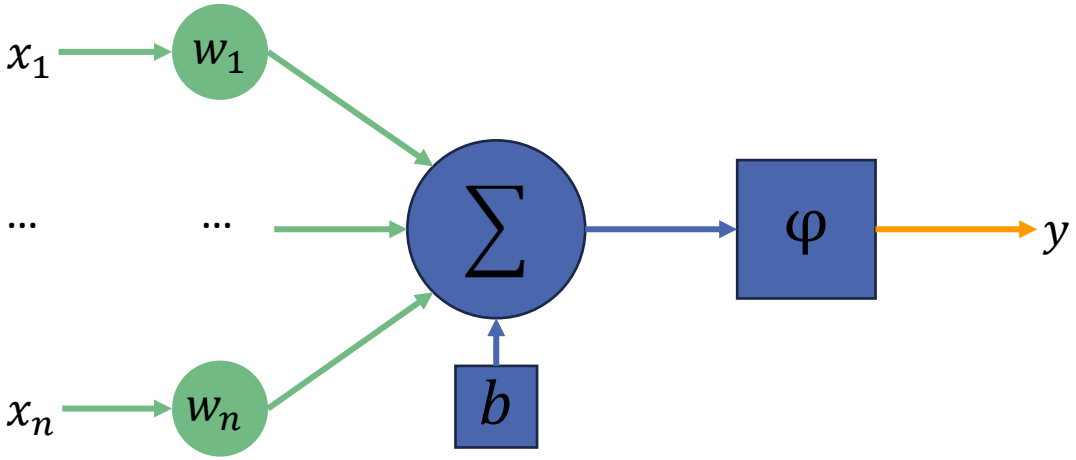
- Classer des individus à partir de caractéristiques

| $t$ | Longueur feuille (cm) | Largeur feuille (cm) |
|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 2.0 |
| 1 | 1.1 | 2.1 |
| 1 | 0.7 | 2.6 |
| 0 | 2.0 | 1.0 |
| 0 | 2.5 | 0.7 |
| 0 | 2.2 | 0.3 |



# Classification binaire linéaire

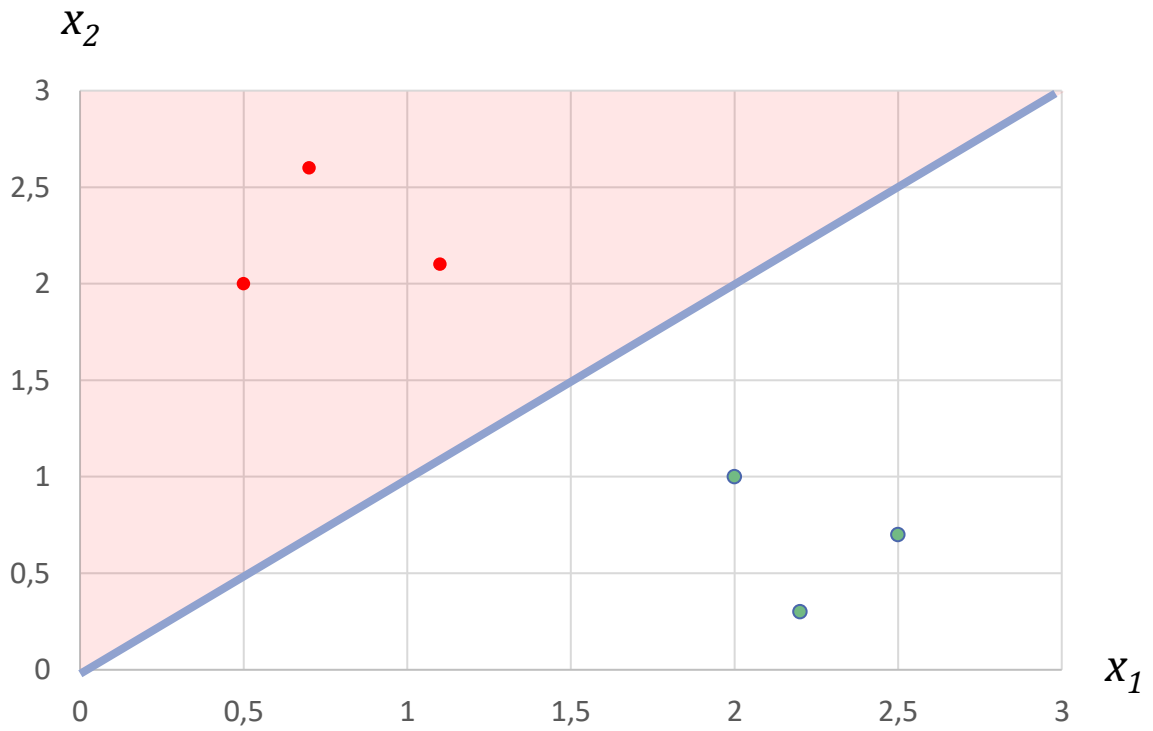
- Utilisation d'un perceptron




$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$ Poids

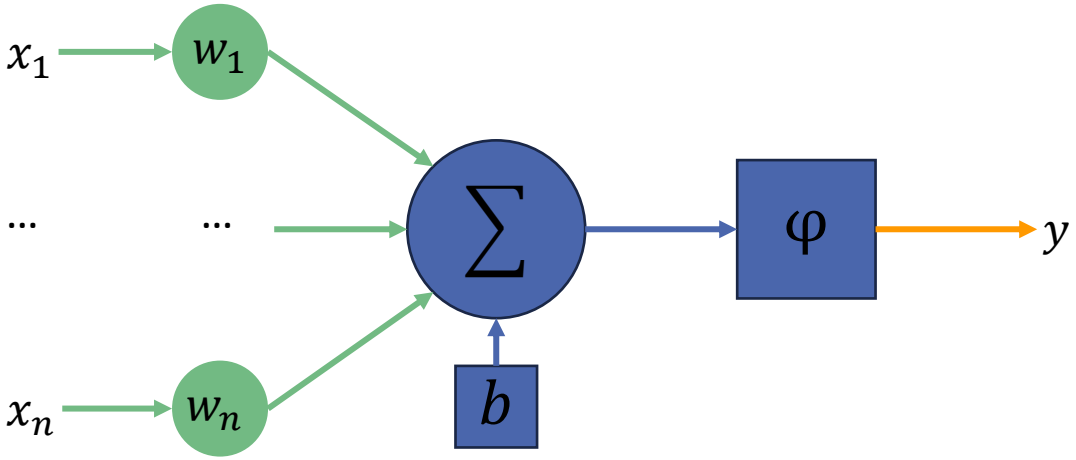
$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b \qquad y = \varphi(z) = \begin{cases} 1 \; si \; z \geq 0 \\ 0 \; si \; z < 0 \end{cases}$$

Agrégation Activation



# Classification binaire linéaire

- Utilisation d'un perceptron

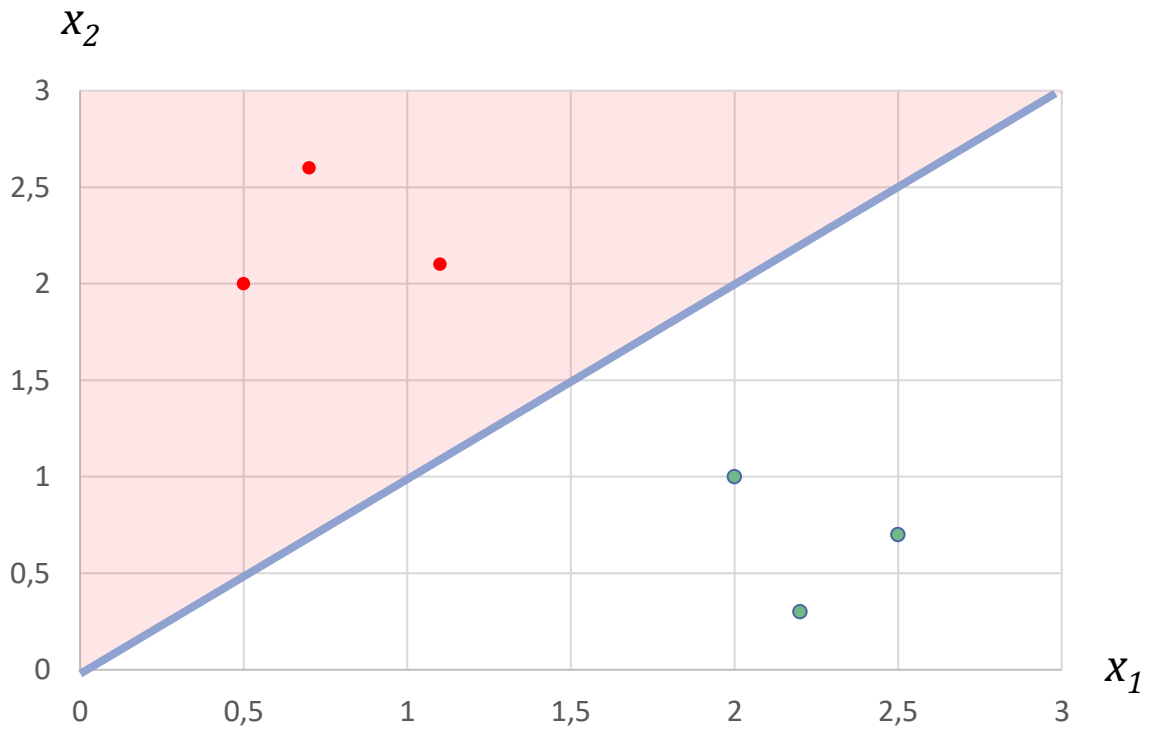



$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$ Poids

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b \qquad y = \varphi(z) = \begin{cases} 1 \; si \; z \geq 0 \\ 0 \; si \; z < 0 \end{cases}$$

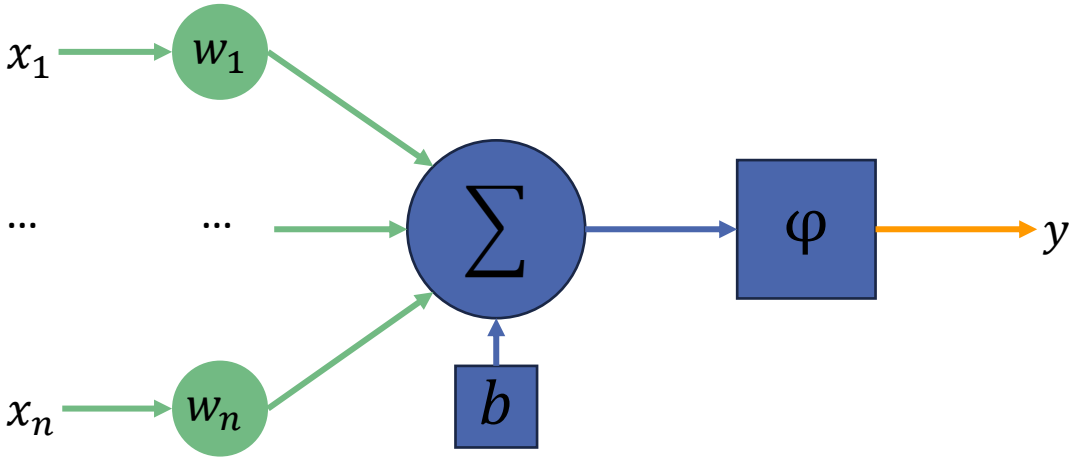
Agrégation Activation

Déterminer les $w_i$



# Classification binaire linéaire par perceptron

- Algorithme d'apprentissage




$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$ Poids

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b \qquad y = \varphi(z) = \begin{cases} 1 \; si \; z \geq 0 \\ 0 \; si \; z < 0 \end{cases}$$

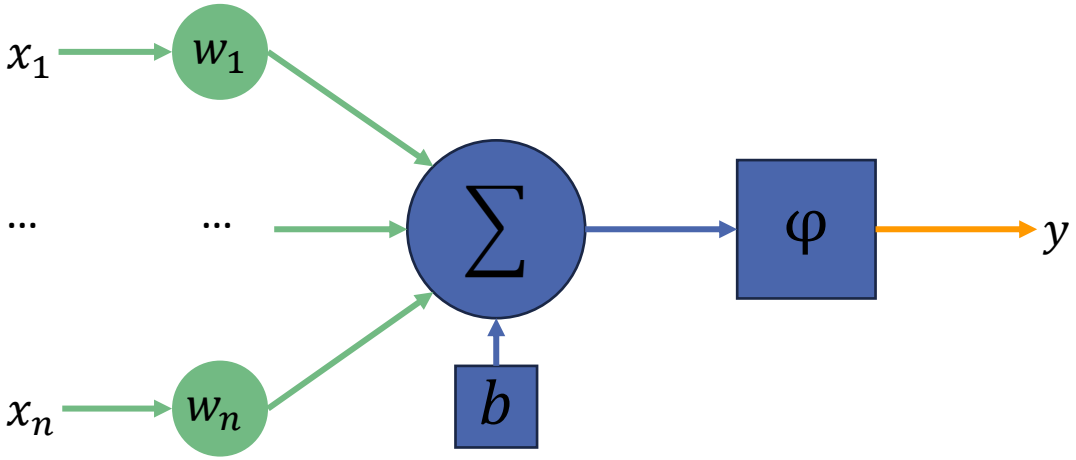
Agrégation Activation

## Déterminer les $w_i$ et $b$

[...]
**tantque** $e > 0$
  **pour chaque** $(X^{(k)}, y^{(k)})$ **faire**
    $y^{(k)} \leftarrow \varphi(z^{(k)})$
    **si** $t^{(k)} \neq y^{(k)}$ **alors**
      **pour chaque** $w_i$ **faire**
        $w_i \leftarrow w_i + \alpha(t^{(k)} - y^{(k)})x_i$
      **finpour**
      $b \leftarrow b + \alpha(t^{(k)} - y^{(k)})$
      $y^{(k)} \leftarrow \varphi(z^{(k)})$
    **finsi**
  **finpour**
  $e \leftarrow \sum|t^{(k)} - y^{(k)}|$
**fintq**

# Classification binaire linéaire par perceptron

- Limitations

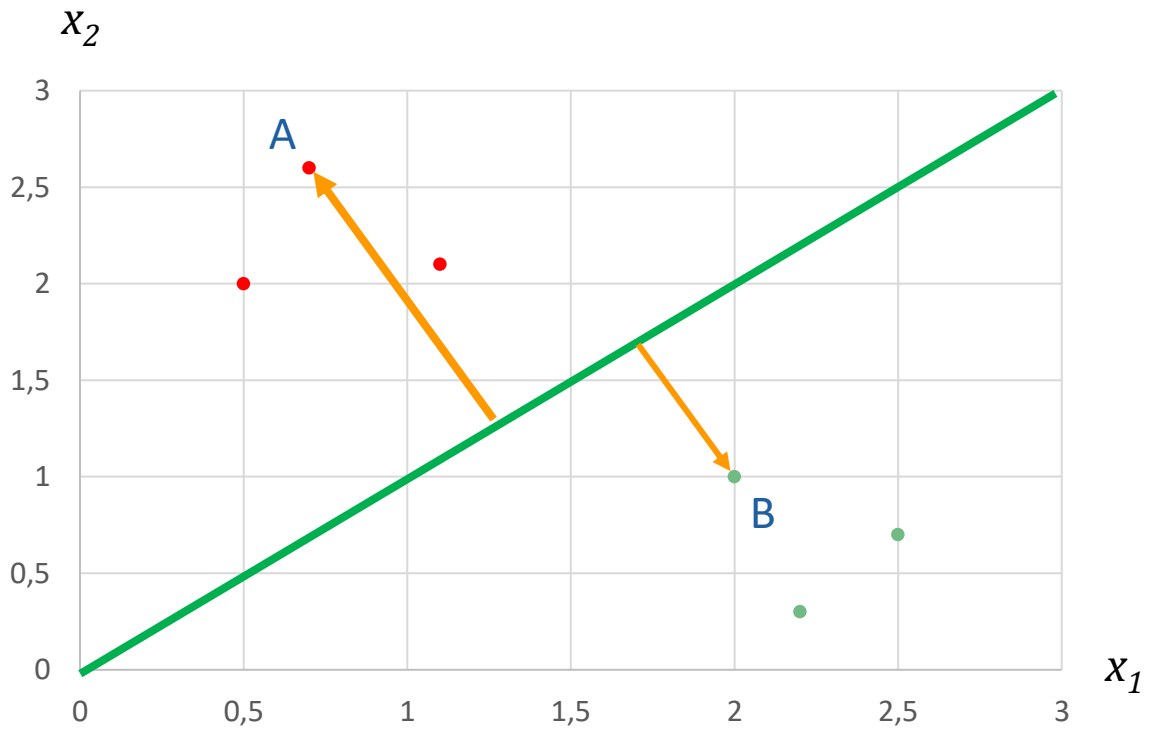



$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$ Poids

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b \qquad y = \varphi(z) = \begin{cases} 1 \; si \; z \geq 0 \\ 0 \; si \; z < 0 \end{cases}$$

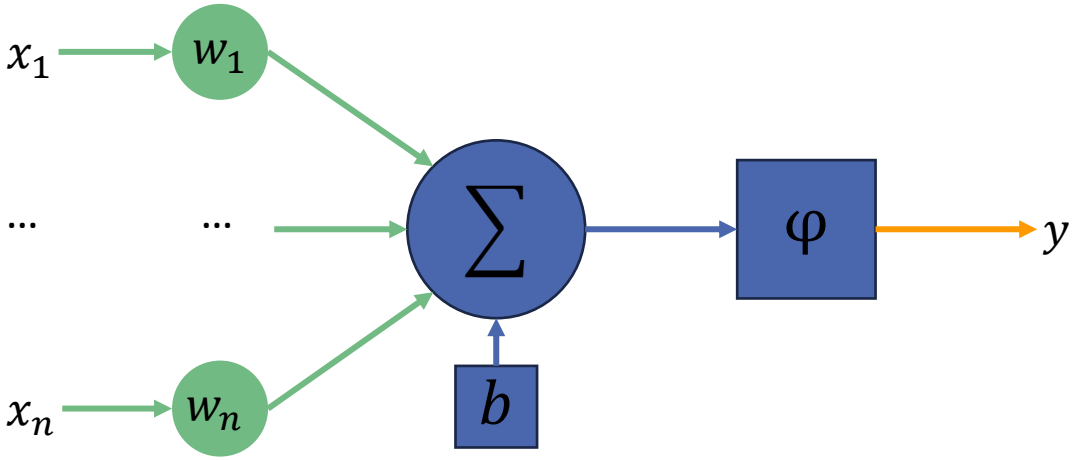
Agrégation Activation

## Quantifier la classification



# Classification binaire linéaire par perceptron

- Limitations




Remplacer la fonction d'activation

$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$ Poids

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b$$

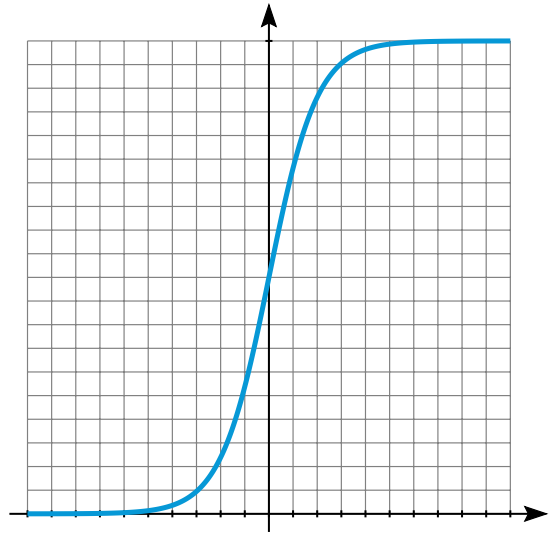
Agrégation

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1 \; si \; z \geq 0 \\ 0 \; si \; z < 0 \end{cases}$$

Heaviside

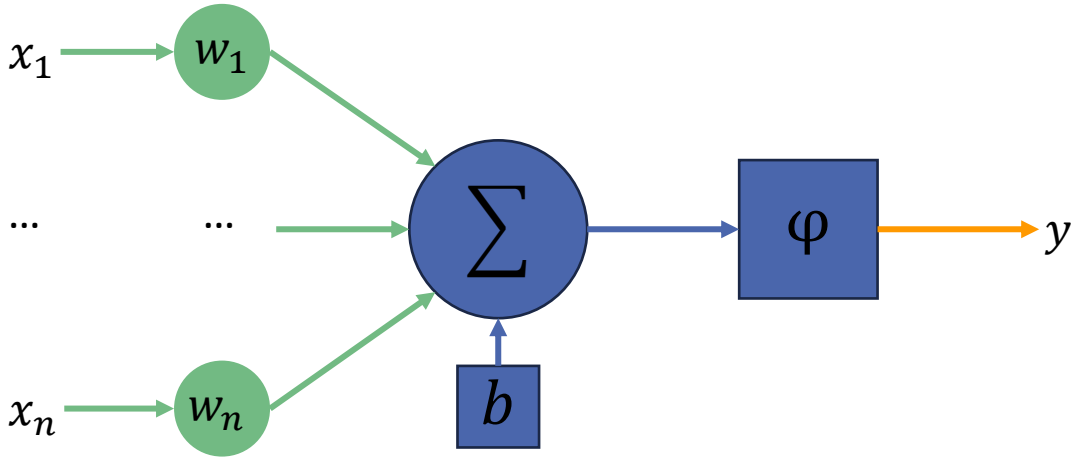
$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Sigmoïde



# Classification binaire linéaire par perceptron

- Limitations

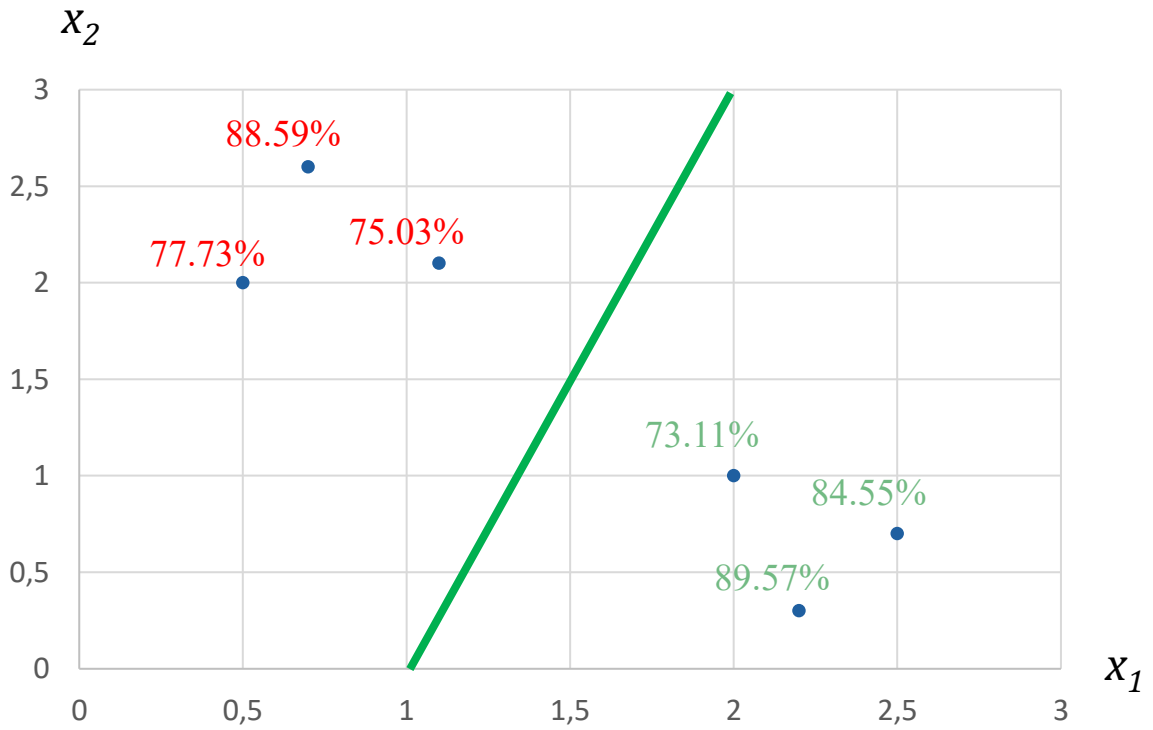



$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b$$ Agrégation

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$ Activation

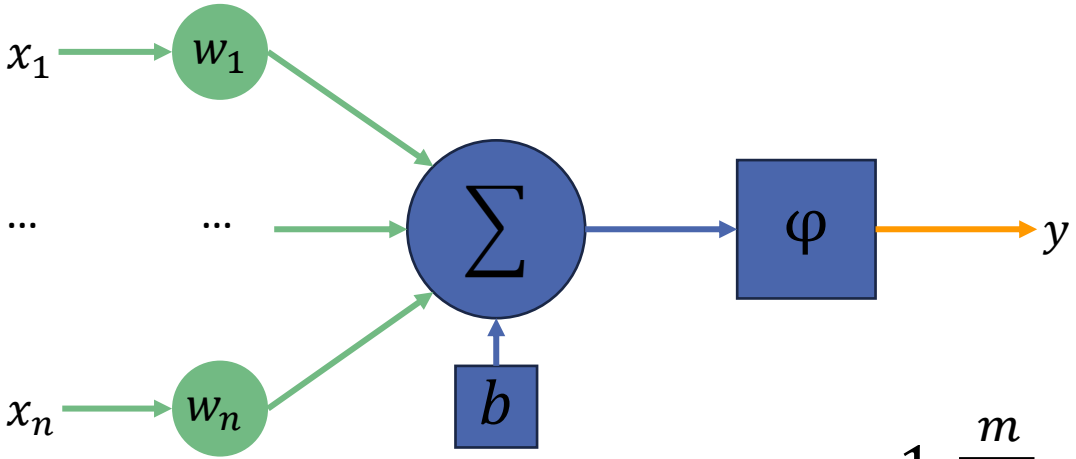
$$y = \begin{cases} 1 \; si \; \varphi(z) \geq 0.5 \\ 0 \; si \; \varphi(z) < 0.5 \end{cases}$$ Classification

Probabilité d'appartenance à une classe



# Classification binaire linéaire par perceptron

- Fonction de coût



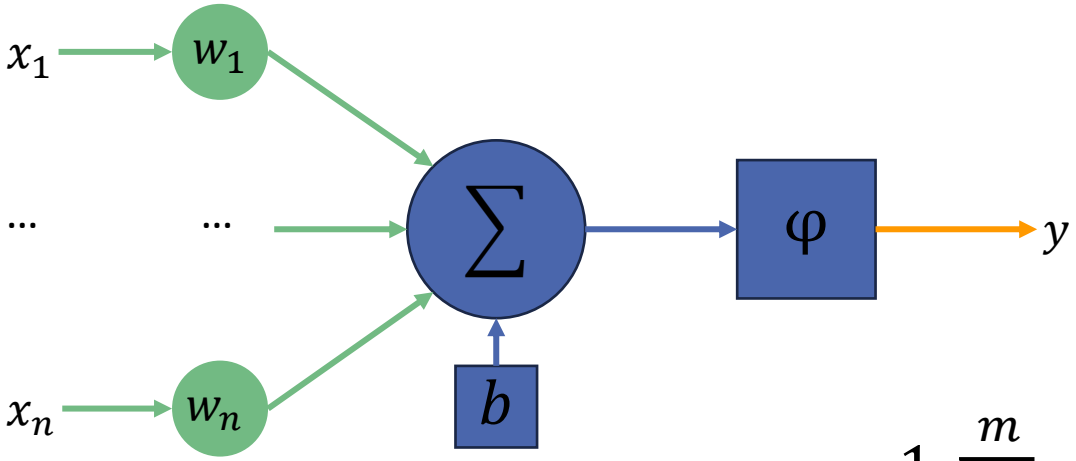

$$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

# Classification binaire linéaire par perceptron

- Fonction de coût




$$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$$

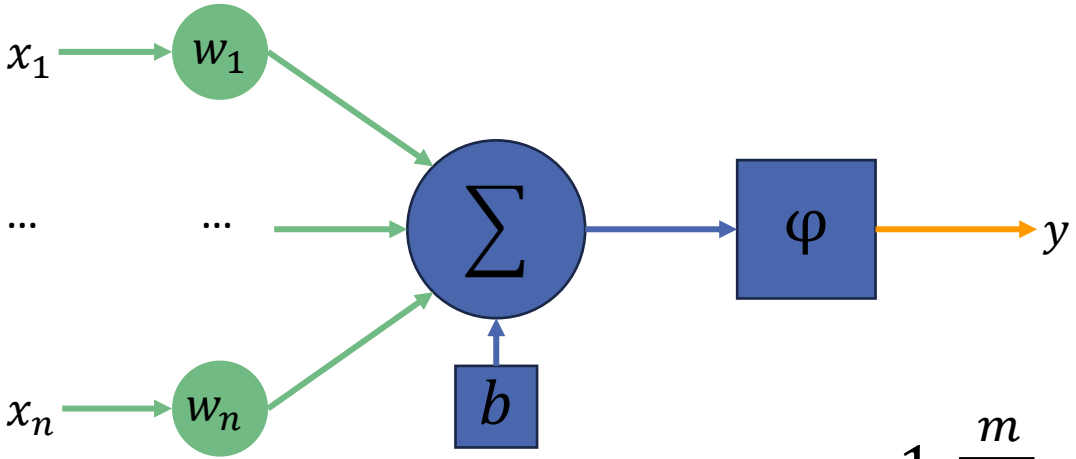
$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

**Attention:** Dans ce cours, log désigne le logarithme népérien, usuellement noté ln en France. Il s'agit de la convention en apprentissage automatique.

# Classification binaire linéaire par perceptron

- Fonction de coût



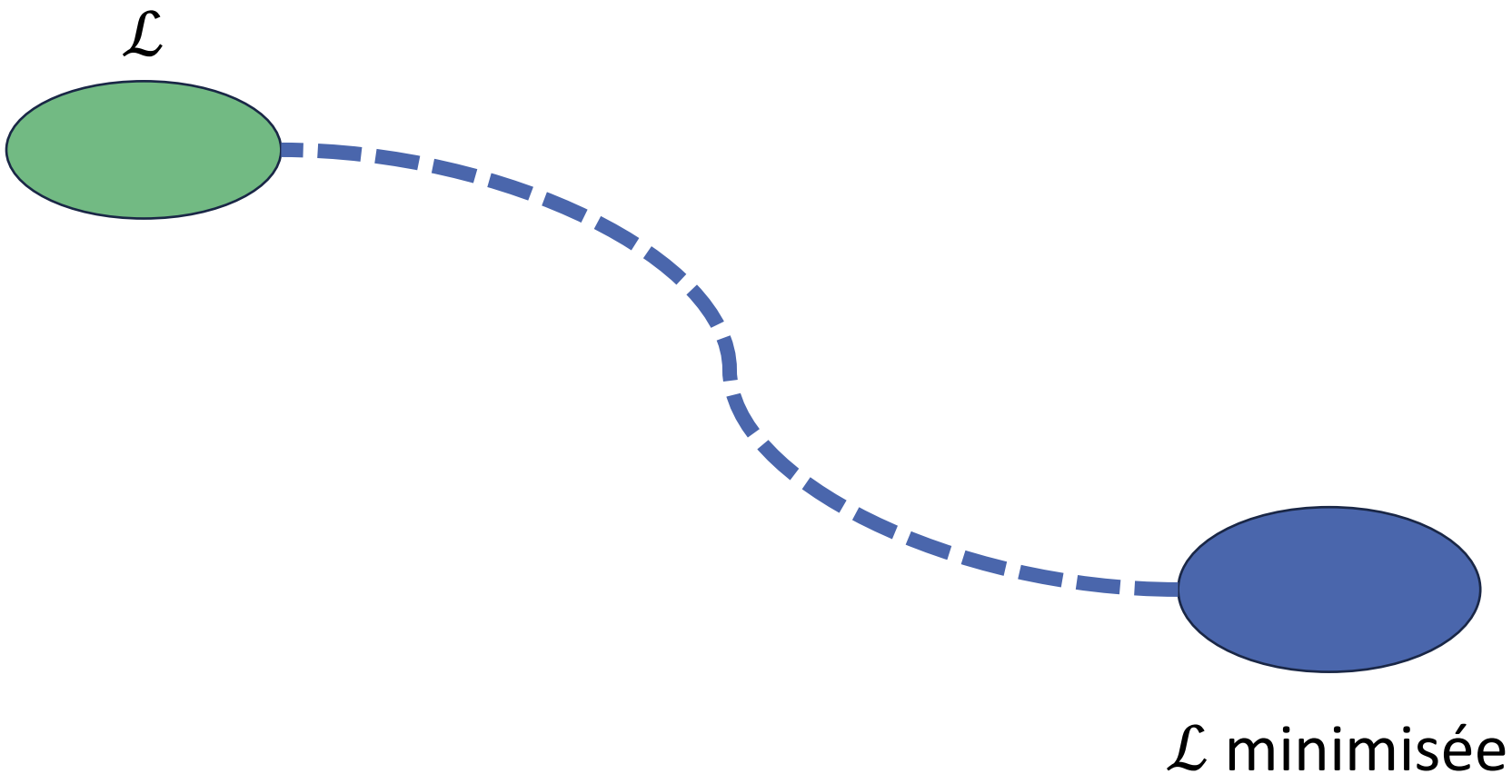

$$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

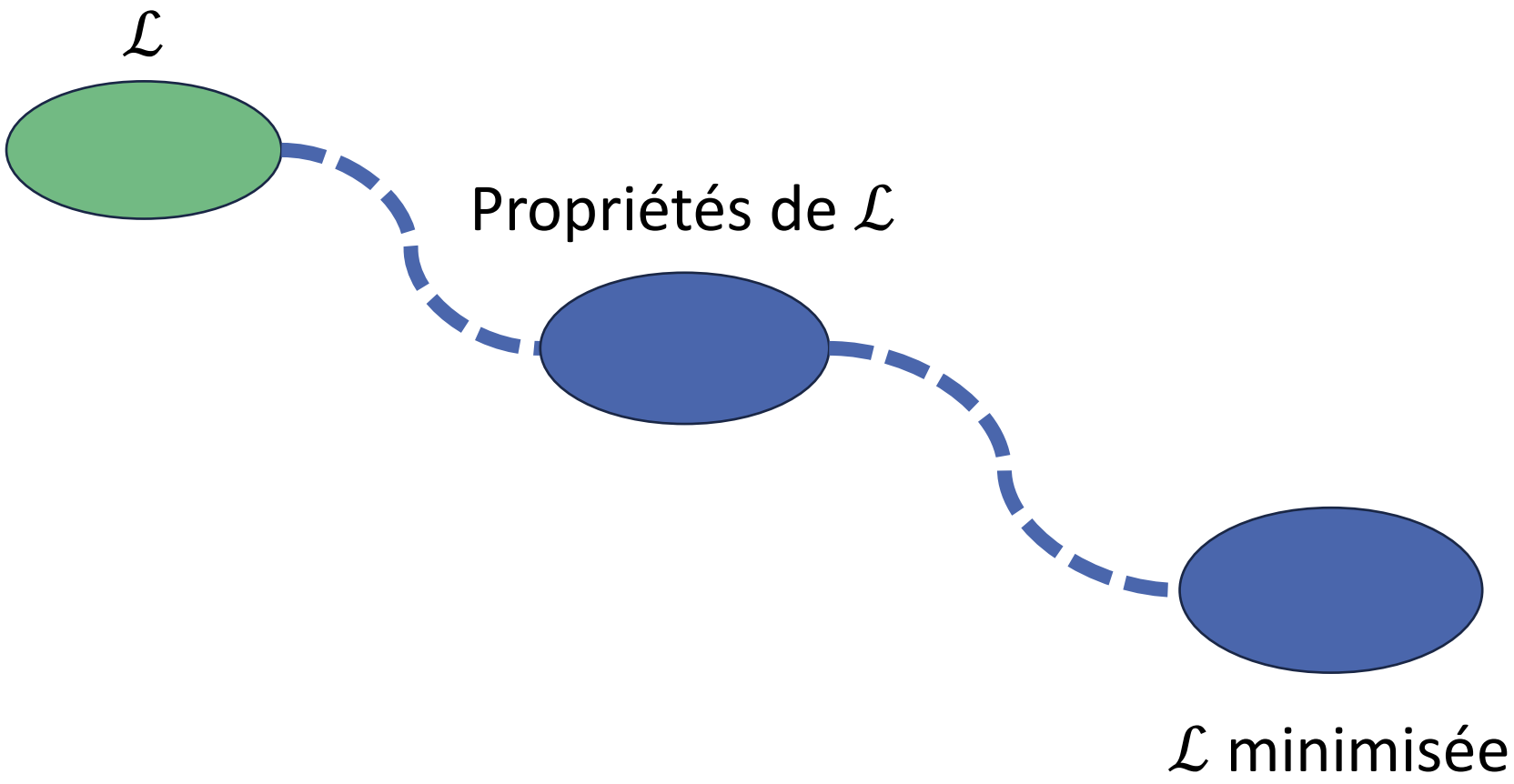
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Trouver le meilleur modèle ≡ minimiser la fonction de coût

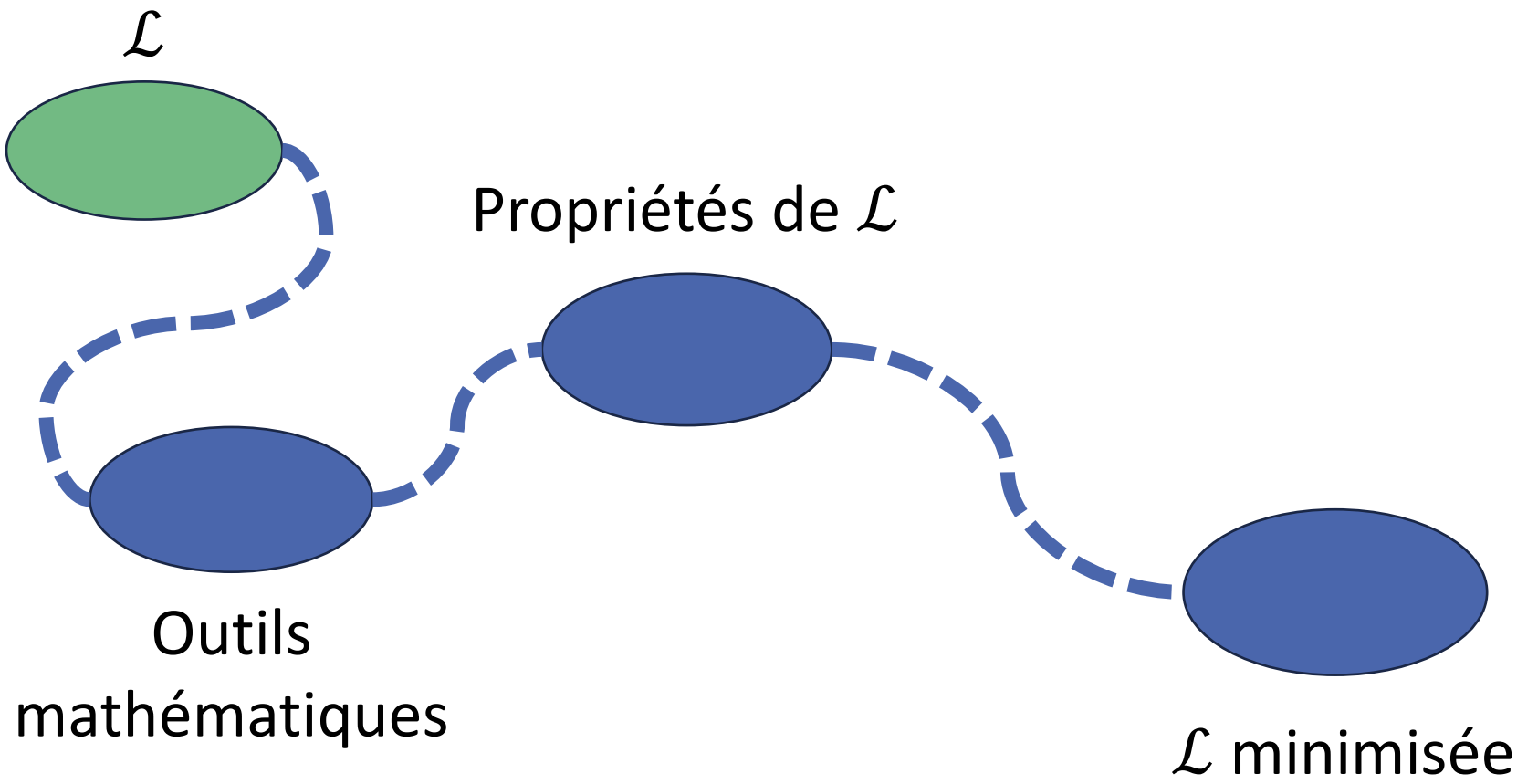
# Cheminement



# Cheminement



# Cheminement



# Outils mathématiques

## Définition[Fonction]

Soit $E$ et $G$ deux ensembles. Une **fonction**, notée $f$, de $E$ dans $G$ est l'association à tout élément $x \in E$ d'au plus un élément $f(x) \in G$.

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

## Définition[Fonction]

Soit $E$ et $G$ deux ensembles. Une **fonction**, notée $f$, de $E$ dans $G$ est l'association à tout élément $x \in E$ d'au plus un élément $f(x) \in G$. La fonction $f$ peut s'écrire:

$$f : E \longrightarrow G \quad x \longmapsto f(x) \qquad \text{ou} \qquad f : E \longrightarrow G$$

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

## Définition[Fonction]

Soit $E$ et $G$ deux ensembles. Une **fonction**, notée $f$, de $E$ dans $G$ est l'association à tout élément $x \in E$ d'au plus un élément $f(x) \in G$. La fonction $f$ peut s'écrire:

$$f : E \longrightarrow G \quad x \longmapsto f(x) \qquad \text{ou} \qquad f : E \longrightarrow G$$

## Définition[Ensemble de départ / Ensemble d'arrivée]

Soit $E$ et $G$ deux ensembles et $f$ une fonction de $E$ dans $G$. On appelle $E$ **ensemble de départ** de $f$ et $G$ **ensemble d'arrivée** de $f$.

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

## Définition[Fonction définie]

Soit $f: E \rightarrow G$ une fonction et soit $x_d \in E$. On dit que $f$ est définie en $x_d$ si et seulement si $f(x_d)$ existe et que $f(x_d) \in G$.

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

## Définition[Fonction définie]

Soit $f : E \rightarrow G$ une fonction et soit $x_d \in E$. On dit que $f$ est **définie** en $x_d$ si et seulement si $f(x_d)$ existe et que $f(x_d) \in G$.

## Définition[Ensemble de définition / Domaine de définition]

Soit $f : E \rightarrow G$ une fonction. L'**ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) de $f$, noté $D_f$, est le sous-ensemble de $E$ tel que pour chaque élément $x \in D_f$ la fonction $f$ est définie.

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

## Définition[Fonction définie]

Soit $f: E \rightarrow G$ une fonction et soit $x_d \in E$. On dit que $f$ est définie en $x_d$ si et seulement si $f(x_d)$ existe et que $f(x_d) \in G$.

## Définition[Ensemble de définition / Domaine de définition]

Soit $f: E \rightarrow G$ une fonction. L'ensemble de définition (ou domaine de définition) de $f$, noté $D_f$, est le sous-ensemble de $E$ tel que pour chaque élément $x \in D_f$ la fonction $f$ est définie. Plus formellement:

$$D_f = \{x \in E \mid \exists y \in G, y = f(x)\}$$

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

## Définition[Image / Antécédent]

Soit $f: D_f \subseteq E \rightarrow G$ et soit $x \in D_f$ tel qu'il existe $y \in G$ avec $y = f(x)$. On appelle $y$ **image** de $x$ par $f$ et $x$ **antécédent** de $y$.

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

## Définition[Image / Antécédent]

Soit $f: D_f \subseteq E \to G$ et soit $x \in D_f$ tel qu'il existe $y \in G$ avec $y = f(x)$. On appelle $y$ **image** de $x$ par $f$ et $x$ **antécédent** de $y$.

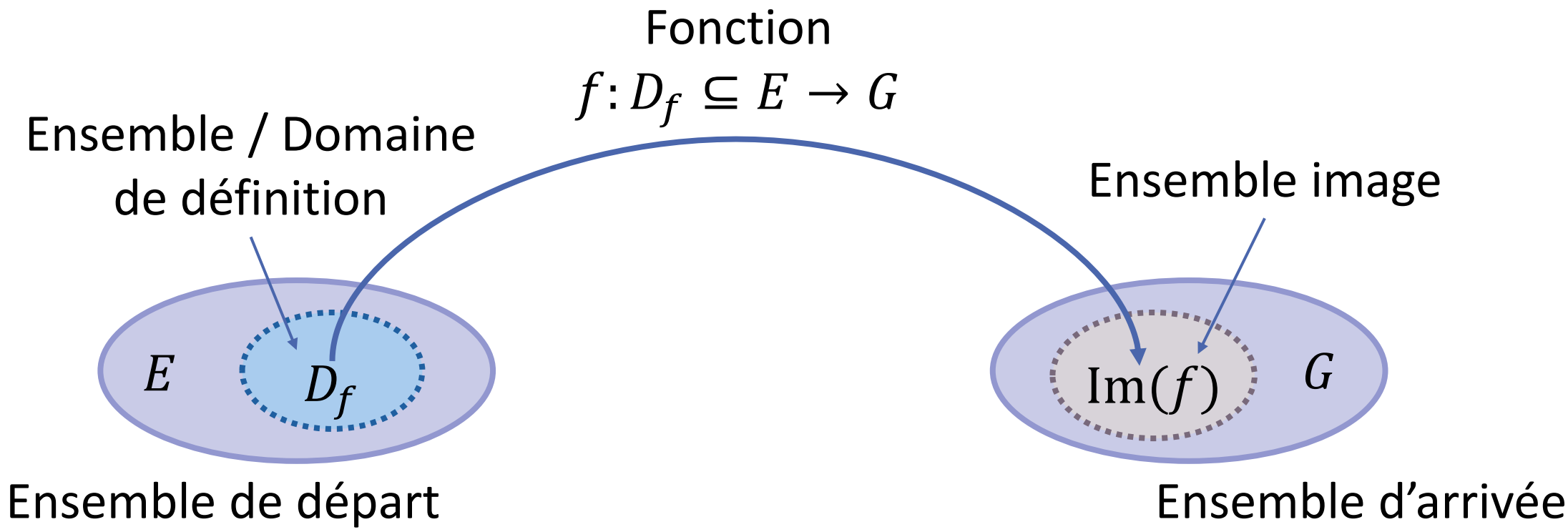
## Définition[Ensemble image]

Soit $E$ et $G$ deux ensembles et $f$ une fonction de $E$ dans $G$. L'**ensemble image** de $f$, noté $\mathbf{Im}(f)$, est le sous-ensemble de $G$ tel que chaque élément $y \in Im(f)$ est une image par $f$. Plus formellement:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in G \mid \exists x \in D_f, y = f(x)\}$$

Pour aller plus loin: https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf

# Résumé[Fonction]



## Définition[Fonction réelle]

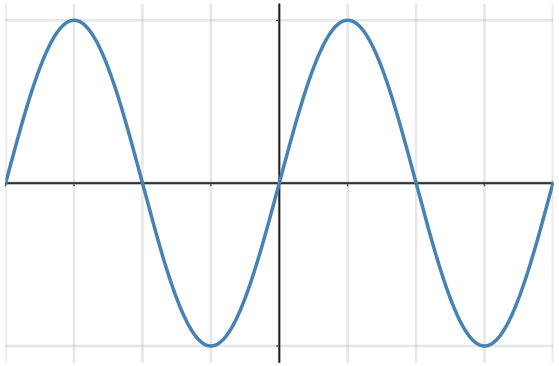
Une fonction $f: D_f \subseteq E \to G$ est appelée **fonction réelle** si $E = G = \mathbb{R}$. Dans ce cas l'ensemble de définition $D_f$ et l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles sur $\mathbb{R}$.

## Définition[Fonction réelle]

Une fonction $f: D_f \subseteq E \to G$ est appelée **fonction réelle** si $E = G = \mathbb{R}$. Dans ce cas l'ensemble de définition $D_f$ et l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles sur $\mathbb{R}$.

## Exemple[Fonction réelle]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto sin(x)$$



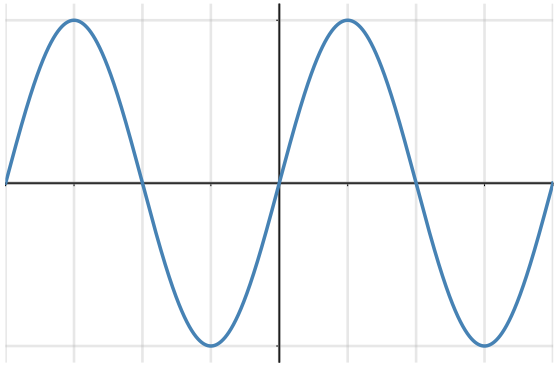
$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$
$$Im(f) = [-1,1]$$

## Définition[Fonction réelle]

Une fonction $f: D_f \subseteq E \to G$ est appelée **fonction réelle** si $E = G = \mathbb{R}$. Dans ce cas l'ensemble de définition $D_f$ et l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles sur $\mathbb{R}$.

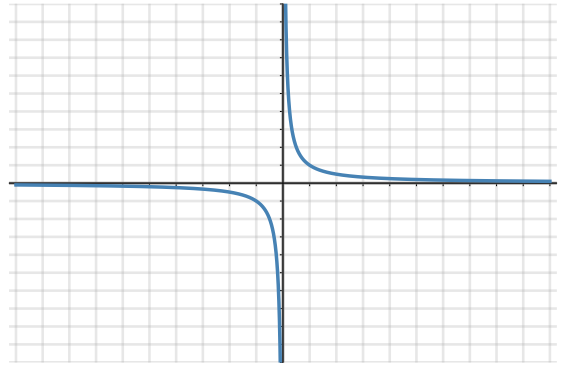
## Exemple[Fonction réelle]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto sin(x)$$



$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$
$$Im(f) = [-1,1]$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$



$$D_g = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$
$$Im(g) = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

## Définition[Adhérence]

Soit $I$ un intervalle non vide. On appelle **adhérence** de $I$, notée $\bar{I}$, l'intervalle ayant les mêmes bornes que $I$ mais étant fermé pour les bornes finies. Tout élément $x \in \bar{I}$ est dit **adhérent** à $I$.

## Définition[Adhérence]

Soit $I$ un intervalle non vide. On appelle **adhérence** de $I$, notée $\bar{I}$, l'intervalle ayant les mêmes bornes que $I$ mais étant fermé pour les bornes finies. Tout élément $x \in \bar{I}$ est dit **adhérent** à $I$.

## Exemple[Adhérence]

$I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ a pour adhérence $\bar{I} = [a, b] = I$

$I = ]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ a pour adhérence $\bar{I} = [a, b]$

$I = ]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ a pour adhérence $\bar{I} = [a, +\infty[$

$I = ]-\infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ a pour adhérence $\bar{I} = ]-\infty, b]$

## Propriété[Adhérence de réunion d'intervalles]

Soit $I$ et $J$ deux intervalles non vides sur $\mathbb{R}$. L'adhérence de la réunion de $I$ et $J$ est égale à la réunion de leurs adhérences. Plus formellement:

$$\overline{I \cup J} = \bar{I} \cup \bar{J}$$

## Propriété[Adhérence de réunion d'intervalles]

Soit $I$ et $J$ deux intervalles non vides sur $\mathbb{R}$. L'adhérence de la réunion de $I$ et $J$ est égale à la réunion de leurs adhérences. Plus formellement:

$$\overline{I \cup J} = \bar{I} \cup \bar{J}$$

## Exemple[Adhérence de réunion d'intervalles]

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b < c < d$

$$\overline{[a,b] \cup [c,d]} = \overline{[a,b]} \cup \overline{[c,d]} = [a,b] \cup [c,d]$$

$$\overline{[a,b[ \cup ]c,d]} = \overline{[a,b[} \cup \overline{]c,d]} = [a,b] \cup [c,d]$$

$$\overline{]-\infty,a[ \cup ]a,+\infty[} = \overline{]-\infty,a[} \cup \overline{]a,+\infty[} = ]-\infty,a] \cup [a,+\infty[ = \mathbb{R}$$

## Définition[Limite]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \overline{D_f}$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Définition[Limite]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

- $f$ admet une **limite** finie en $x_0$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Définition[Limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

- $f$ admet une **limite** finie en $x_0$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon)$
- $f$ admet $-\infty$ pour **limite** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) < A)$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Définition[Limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

- $f$ admet une **limite** finie en $x_0$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon)$
- $f$ admet $-\infty$ pour **limite** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) < A)$
- $f$ admet $+\infty$ pour **limite** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) > A)$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Définition[Limite]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

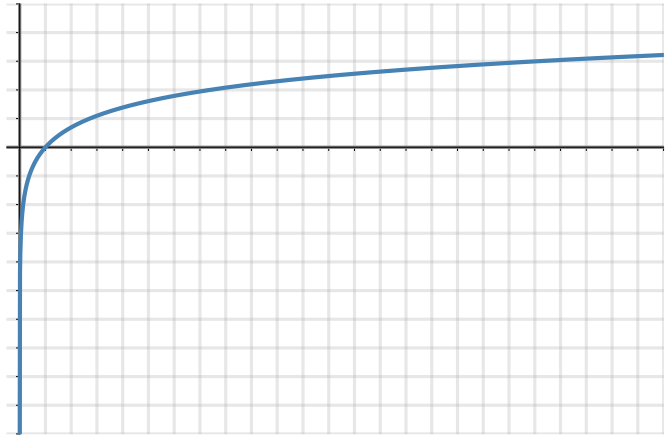
- $f$ admet une **limite** finie en $x_0$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon)$
- $f$ admet $-\infty$ pour **limite** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) < A)$
- $f$ admet $+\infty$ pour **limite** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) > A)$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ la limite de $f$ en $x_0$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Exemple[Limite]

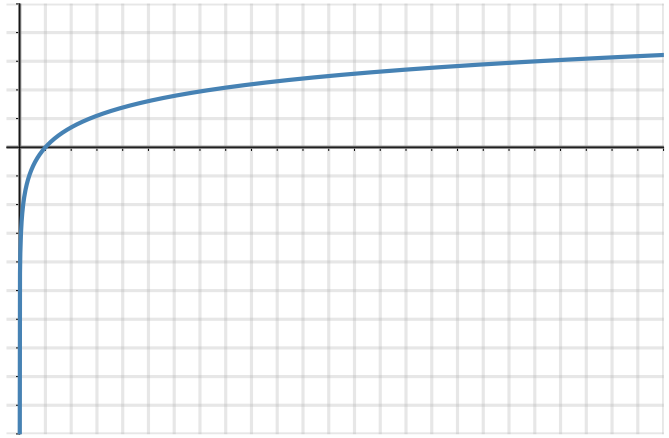
$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$



Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Exemple[Limite]

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$

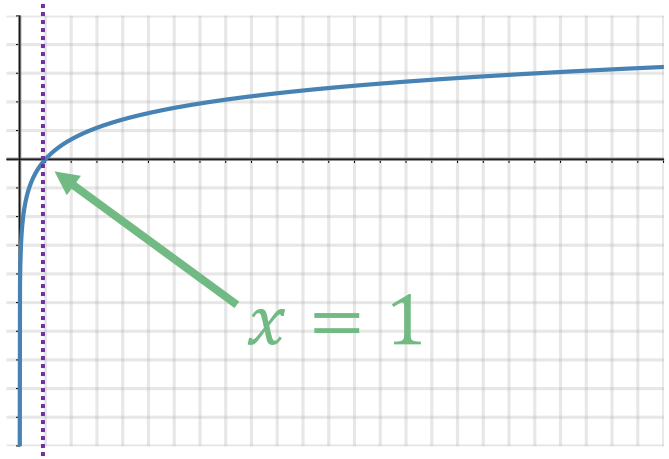


$$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Exemple[Limite]

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$



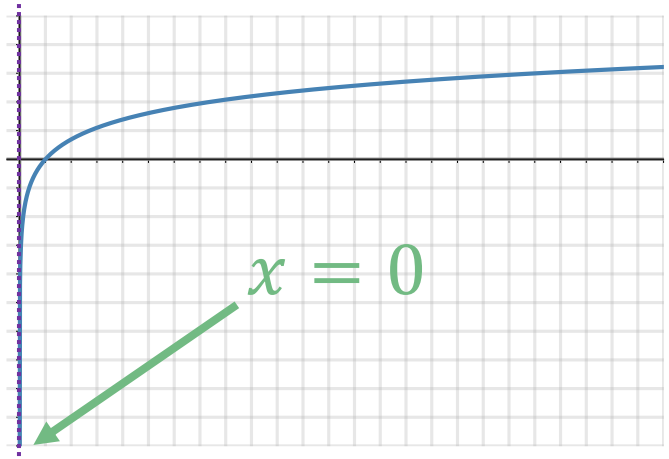

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Exemple[Limite]

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$



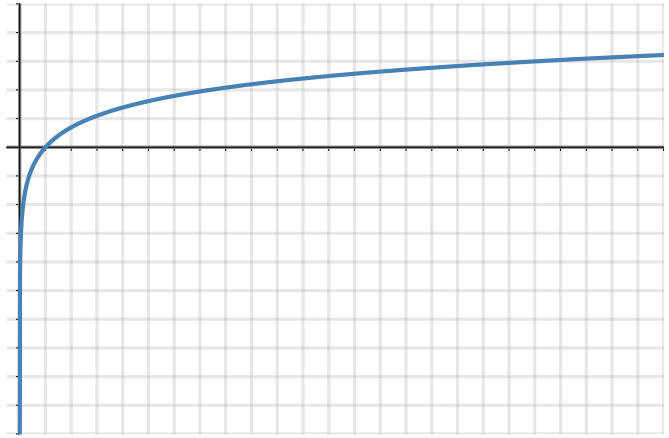

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Exemple[Limite]

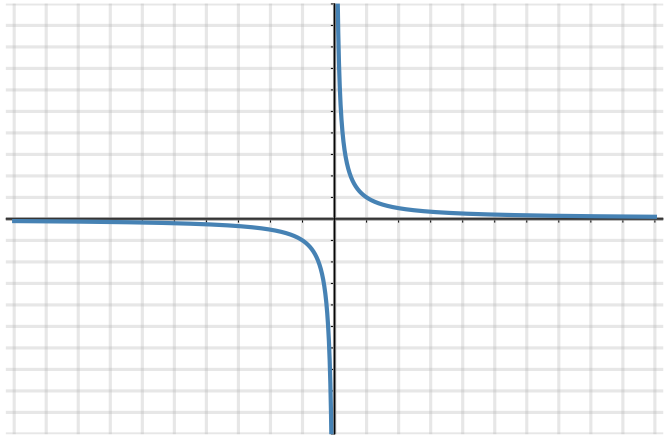
$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x)$$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

$$g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

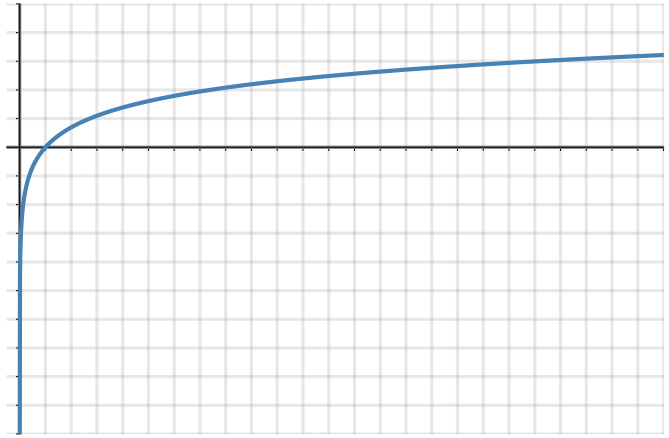


$$\lim_{x \to 0} g(x) = ?$$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Exemple[Limite]

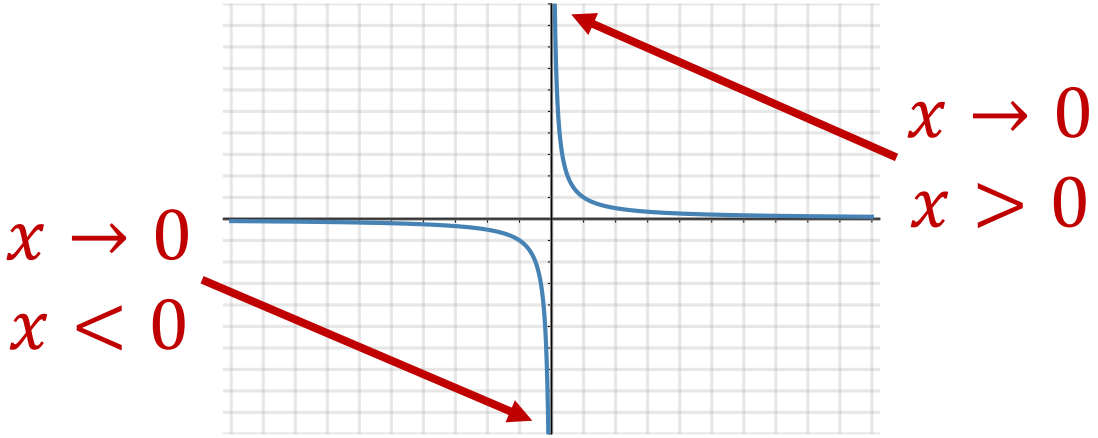
$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x)$$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

$$g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$




$$\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty \, ?$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty \, ?$$

Limite multiple ?

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Définition[Limite à gauche]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

- $f$ admet une **limite à gauche** finie en $x_0$ s'il existe $l_g \in \mathbb{R}$ tel que:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(x_0 - \delta < x < x_0 \to \left|f(x) - l_g\right| < \varepsilon\right)$
- $f$ admet $-\infty$ pour **limite à gauche** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (x_0 - \delta < x < x_0 \to f(x) < A)$
- $f$ admet $+\infty$ pour **limite à gauche** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (x_0 - \delta < x < x_0 \to f(x) > A)$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ la **limite à gauche** de $f$ en $x_0$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Définition[Limite à droite]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

- $f$ admet une **limite à droite** finie en $x_0$ s'il existe $l_d \in \mathbb{R}$ tel que:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (x_0 < x < x_0 + \delta \to |f(x) - l_d| < \varepsilon)$
- $f$ admet $-\infty$ pour **limite à droite** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (x_0 < x < x_0 + \delta \to f(x) < A)$
- $f$ admet $+\infty$ pour **limite à droite** en $x_0$ si:
  $\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (x_0 < x < x_0 + \delta \to f(x) > A)$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ la **limite à droite** de $f$ en $x_0$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Théorème[Unicité de la limite]

Si une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en $x_0 \in \overline{D_f}$ alors celle-ci est unique.

[Voir Preuve]

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

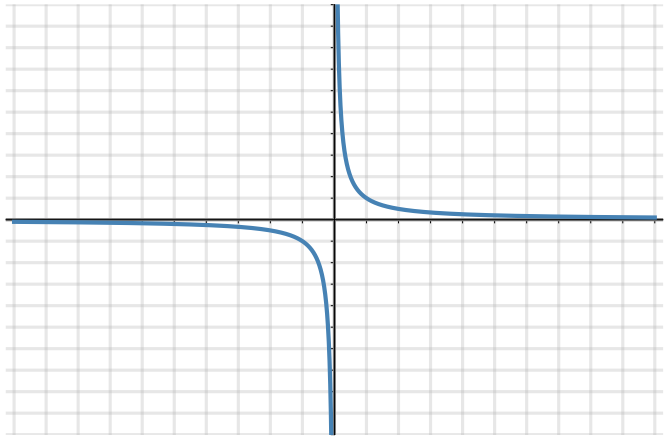
## Lien[Limite / Limite à gauche / Limite à droite]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. La fonction $f$ admet une limite en $x_0$ si et seulement si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en $x_0$ et que celles-ci sont égales. On à alors:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

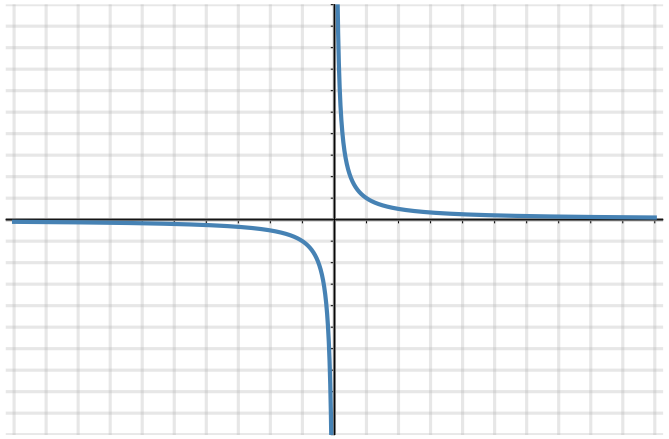
# Exemple[Limite]

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$



# Exemple[Limite]

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$



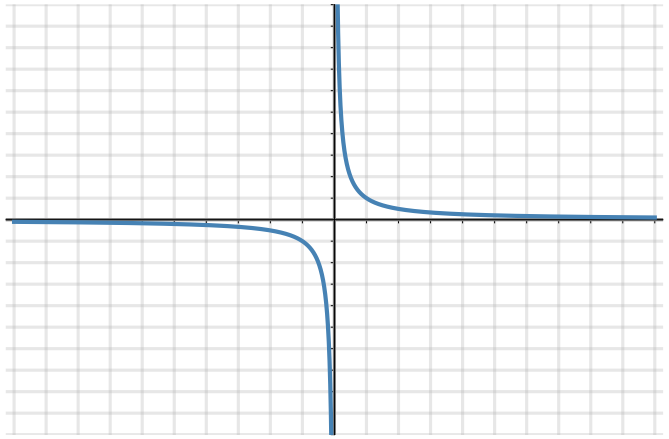
Indéfinie en 0

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty \neq \lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

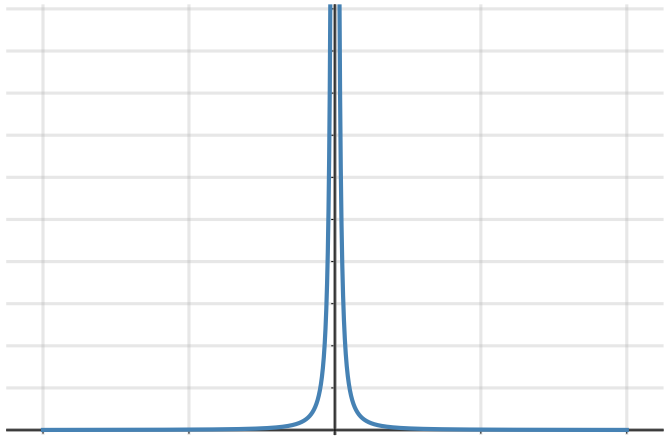
Pas de limite en 0

# Exemple[Limite]

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$



$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$$

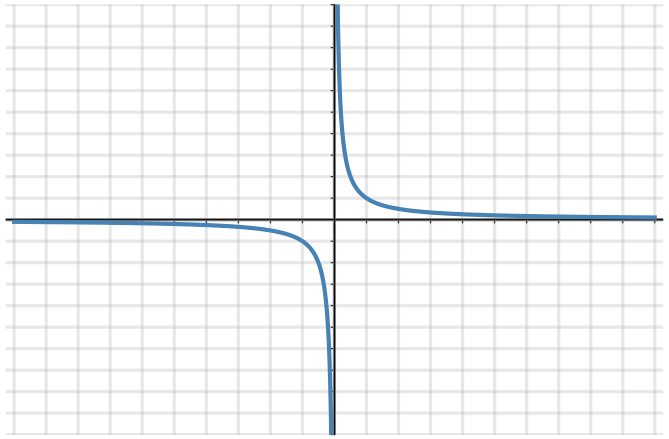


Indéfinie en $0$

Pas de limite en $0$

# Exemple[Limite]

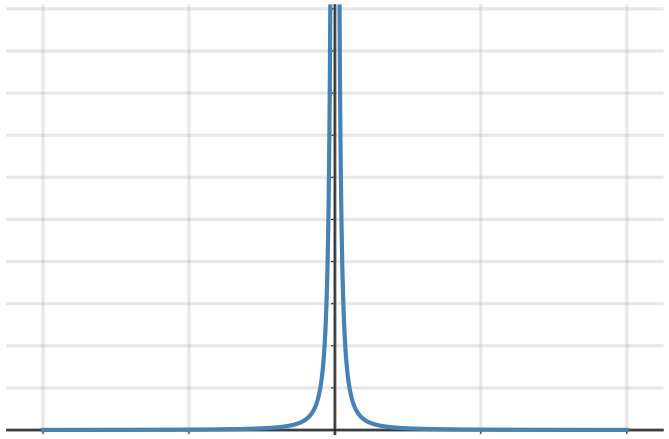
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$



Indéfinie en 0

Pas de limite en 0

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$$



Indéfinie en 0

$$\lim_{x \to 0} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = +\infty$$

$$=$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$$

## Propriétés[Limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On a pour $D_f \bigcap D_g$:

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Propriétés[Limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On a pour $D_f \cap D_g$:

| $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x)$ | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim_{x \to x_0} f(x)$ \ $\lim_{x \to x_0} g(x)$ | $-\infty$ | $l_g$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | Ind. |
| $l_f$ | $-\infty$ | $l_f + l_g$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | Ind. | $+\infty$ | $+\infty$ |

Ind. Signifie Indéterminée

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Propriétés[Limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On a pour $D_f \cap D_g$ :

| $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)$ | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim_{x\to x_0} g(x)$ | $-\infty$ | $l_g$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | Ind. |
| $l_f$ | $-\infty$ | $l_f + l_g$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | Ind. | $+\infty$ | $+\infty$ |

| $\lim_{x\to x_0} f(x)\times g(x)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim_{x\to x_0} g(x)$ | $-\infty$ | $\boldsymbol{l_g \neq 0}$ | $l_g = 0$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $\pm\infty$ | Ind. | $-\infty$ |
| $\boldsymbol{l_f \neq 0}$ | $\pm\infty$ | $l_f \times l_g$ | 0 | $\pm\infty$ |
| $\boldsymbol{l_f = 0}$ | Ind. | 0 | 0 | Ind. |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | Ind. | $+\infty$ |

Ind. Signifie Indéterminée

Le signe de $\pm\infty$ est déterminé par le signe de $l$ selon la règle de la multiplication

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

# Propriétés[Limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On a pour $D_f \cap D_g$ :

| $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x \to x_0} g(x)$ \ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ | $-\infty$ | $l_f \neq 0$ | $l_f = 0$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | Ind. | 0 | 0 | Ind. |
| $l_g \neq 0$ | $\pm\infty$ | $\frac{l_f}{l_g}$ | 0 | $\pm\infty$ |
| $l_g = 0^-$ | $+\infty$ | $\pm\infty$ | Ind. | $-\infty$ |
| $l_g = 0^+$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | Ind. | $+\infty$ |
| $+\infty$ | Ind. | 0 | 0 | Ind. |

Le signe de $\pm\infty$ est déterminé par le signe de $l_f$, $l_g$ ou du 0 selon la règle de la multiplication

Ind. Signifie Indéterminée

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / limites*

## Définition[Continuité]

Une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** en $x_0 \in D_f$ si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Une fonction est continue en un point $x_0$ si sa limite $l$ en ce point est égale à sa valeur $f(x_0)$.

## Définition[Continuité]

Une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** en $x_0 \in D_f$ si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

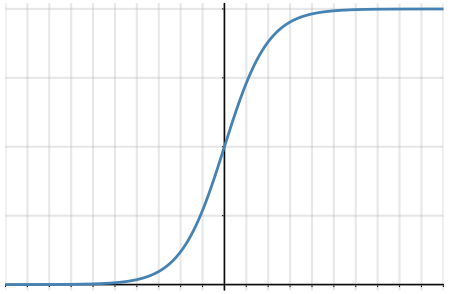
On dit que $f$ est **continue sur** $E \subseteq D_f$ si $\forall x_i \in E \;\; f(x)$ est **continue** en $x_i$

**Attention:** Ne pas confondre définition et continuité !

## Exemple[Continuité]

En $x_0 = 0$, la fonction Sigmoïde …

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

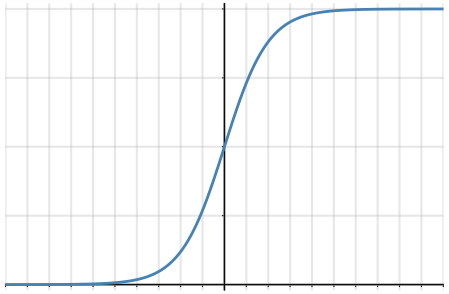


## Exemple[Continuité]

En $x_0 = 0$, la fonction Sigmoïde est **continue**

$$\lim_{x \to 0} \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

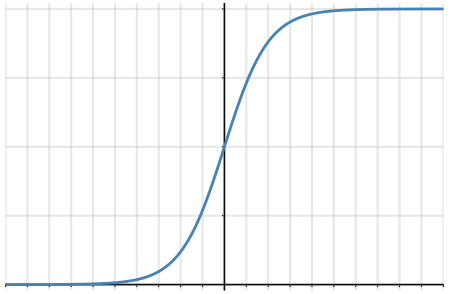


## Exemple[Continuité]

En $x_0 = 0$, la fonction Sigmoïde est **continue**

$$\lim_{x \to 0} \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} = f(0)$$

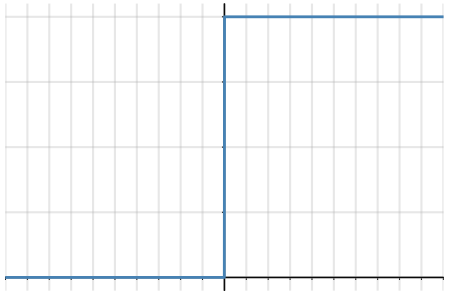
$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



## Exemple[Non-continuité]

En $x_0 = 0$, la fonction Heaviside …

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$$

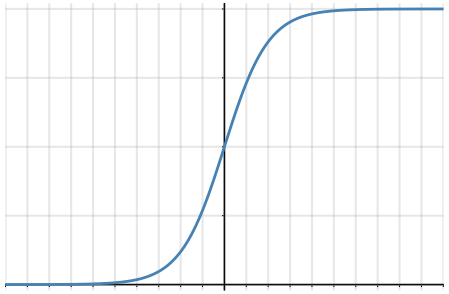


## Exemple[Continuité]

En $x_0 = 0$, la fonction Sigmoïde est **continue**

$$\lim_{x \to 0} \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

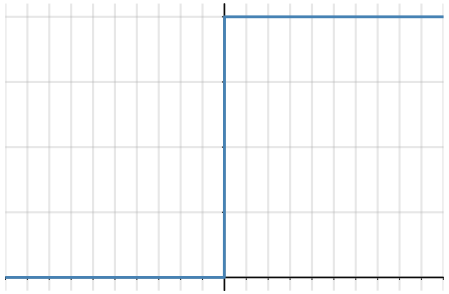


## Exemple[Non-continuité]

En $x_0 = 0$, la fonction Heaviside n'est pas **continue**

$$\left.\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{cases}\right] \text{Pas de limite}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$$



Mais elle est définie avec $f(0) = 1$

## Définition[Maximum global / Minimum global]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $D_f \neq \emptyset$

- $f$ admet un **maximum global** en $x_M \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \leq f(x_M)$. On appelle $f(x_M)$ le **maximum** de $f$ sur $D_f$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Maximum global / Minimum global]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $D_f \neq \emptyset$

- $f$ admet un **maximum global** en $x_M \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \leq f(x_M)$. On appelle $f(x_M)$ le **maximum** de $f$ sur $D_f$.
- $f$ admet un **minimum global** en $x_m \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \geq f(x_m)$. On appelle $f(x_m)$ le **minimum** de $f$ sur $D_f$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Maximum global / Minimum global]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $D_f \neq \emptyset$

- $f$ admet un **maximum global** en $x_M \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \leq f(x_M)$. On appelle $f(x_M)$ le **maximum** de $f$ sur $D_f$.
- $f$ admet un **minimum global** en $x_m \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \geq f(x_m)$. On appelle $f(x_m)$ le **minimum** de $f$ sur $D_f$.

## Définition[Maximum local / Minimum local]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = ]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[, x_0 \in D_f$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Maximum global / Minimum global]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $D_f \neq \emptyset$

- $f$ admet un **maximum global** en $x_M \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \leq f(x_M)$. On appelle $f(x_M)$ le **maximum** de $f$ sur $D_f$.
- $f$ admet un **minimum global** en $x_m \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \geq f(x_m)$. On appelle $f(x_m)$ le **minimum** de $f$ sur $D_f$.

## Définition[Maximum local / Minimum local]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = ]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[, x_0 \in D_f$

- $f$ admet un **maximum local** en $x_0$ si $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \forall x \in I \subseteq D_f \;\; f(x) \leq f(x_0)$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Maximum global / Minimum global]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $D_f \neq \emptyset$

- $f$ admet un **maximum global** en $x_M \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \leq f(x_M)$. On appelle $f(x_M)$ le **maximum** de $f$ sur $D_f$.
- $f$ admet un **minimum global** en $x_m \in D_f$ si $\forall x \in D_f \;\; f(x) \geq f(x_m)$. On appelle $f(x_m)$ le **minimum** de $f$ sur $D_f$.

## Définition[Maximum local / Minimum local]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = ]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[, x_0 \in D_f$

- $f$ admet un **maximum local** en $x_0$ si $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \forall x \in I \subseteq D_f \;\; f(x) \leq f(x_0)$.
- $f$ admet un **minimum local** en $x_0$ si $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \forall x \in I \subseteq D_f \;\; f(x) \geq f(x_0)$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Extremum / Extremum local]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $f$ admet un **extremum** en $x_0$ si $f(x_0)$ est le minimum ou le maximum de $f$ sur $D_f$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Extremum / Extremum local]

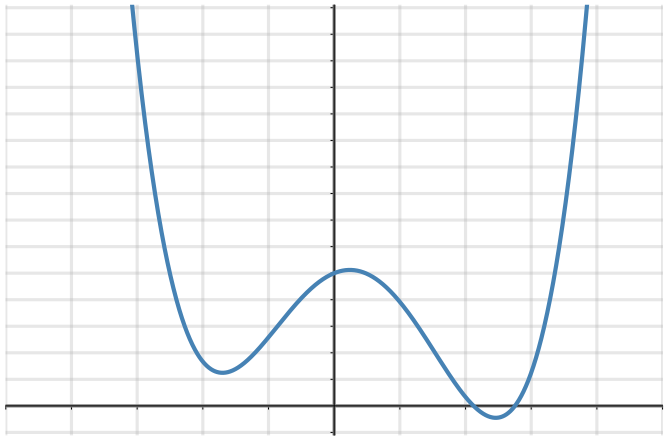
Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $f$ admet un **extremum** en $x_0$ si $f(x_0)$ est le minimum ou le maximum de $f$ sur $D_f$.
- $f$ admet un **extremum local** en $x_0$ si $f(x_0)$ est un minimum local ou un maximum local de $f$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

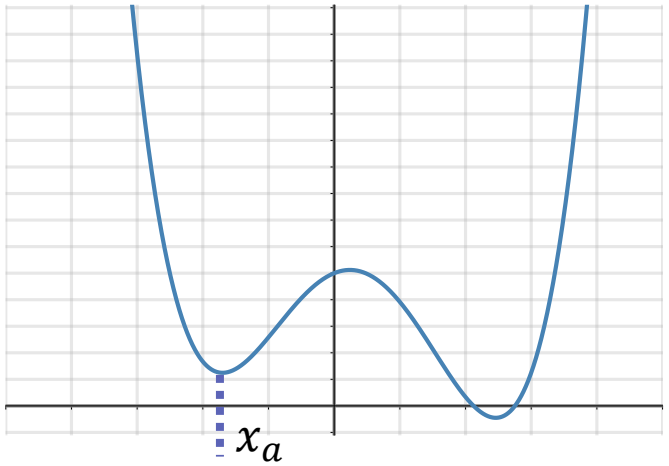
# Définition[Extremum / Extremum local]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$



# Définition[Extremum / Extremum local]

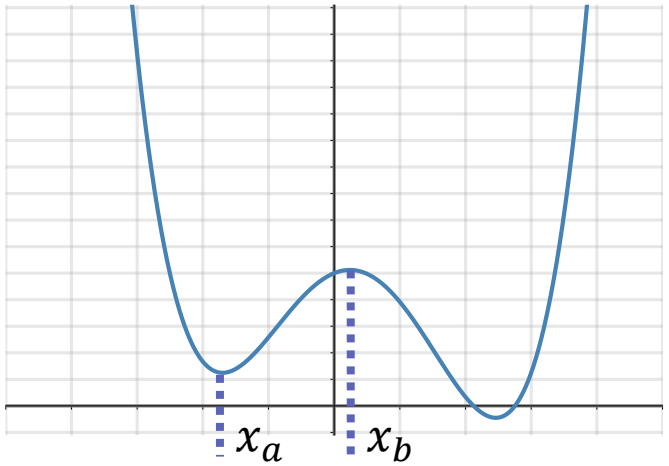
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$




- $g$ admet un minimum local en $x_a$

# Définition[Extremum / Extremum local]

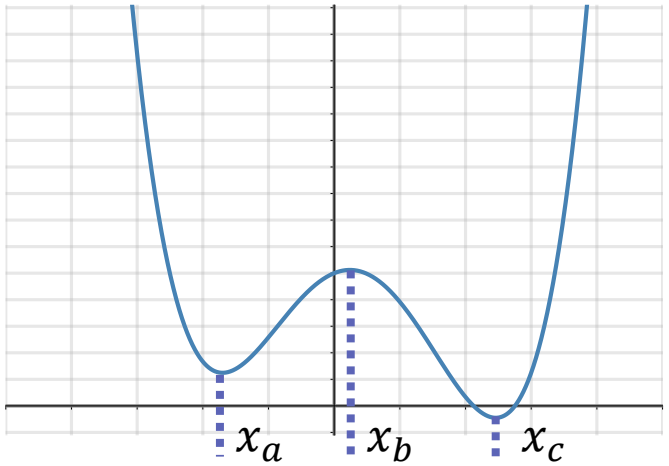
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$




- $g$ admet un minimum local en $x_a$
- $g$ admet un maximum local en $x_b$

# Définition[Extremum / Extremum local]

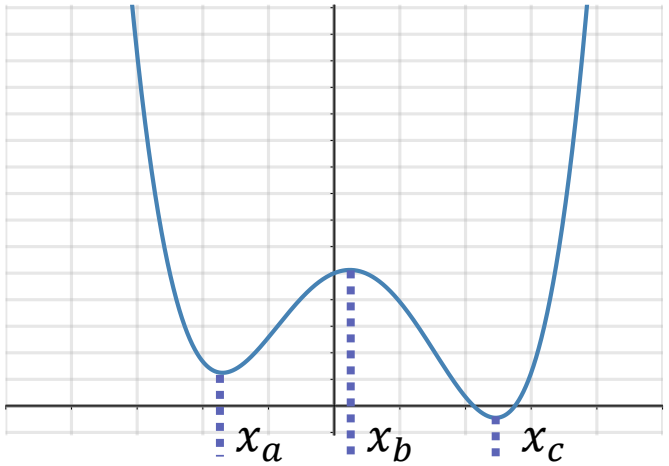
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$




- $g$ admet un minimum local en $x_a$
- $g$ admet un maximum local en $x_b$
- $g$ admet un minimum global en $x_c$

# Définition[Extremum / Extremum local]

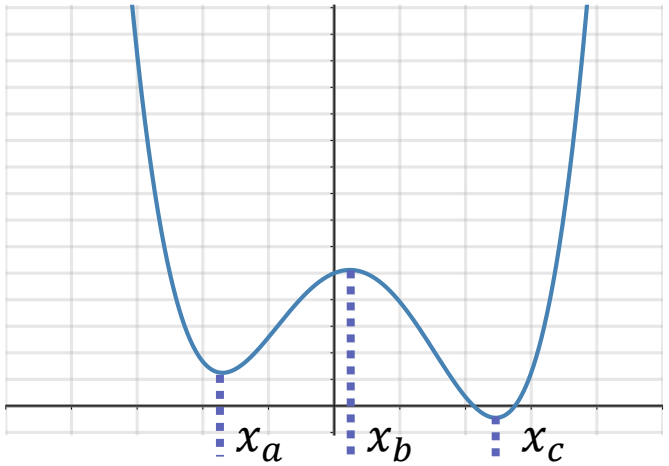
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$




- $g$ admet un minimum local en $x_a$
- $g$ admet un maximum local en $x_b$
- $g$ admet un minimum global en $x_c$
- Le minimum de $g$ est $g(x_c)$

# Définition[Extremum / Extremum local]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

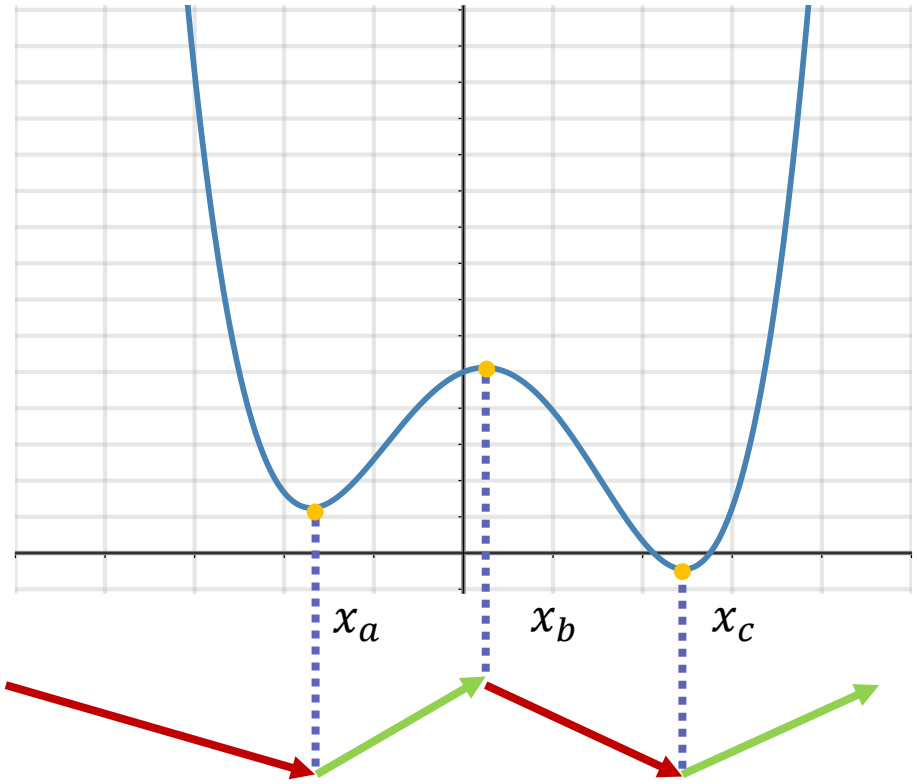



- $g$ admet un minimum local en $x_a$
- $g$ admet un maximum local en $x_b$
- $g$ admet un minimum global en $x_c$
- Le minimum de $g$ est $g(x_c)$

**Attention**: Les limites de $g$ quand $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$ ne sont pas des maximums car ils ne sont jamais atteints

# Intuition[Lien Extremum / variations]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$




Les extrema semblent apparaitre:

- Quand on passe d'une diminution de la fonction à une augmentation
- Quand on passe d'une augmentation de la fonction à une diminution

## Définition[Sens de variation ]

Soit une fonction $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Sens de variation ]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est:

- **Constante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; f(x) = f(y)$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Sens de variation ]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est:

- **Constante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; f(x) = f(y)$
- **Croissante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; x < y \to f(x) \leq f(y)$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Sens de variation ]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est:

- **Constante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; f(x) = f(y)$
- **Croissante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; x < y \to f(x) \leq f(y)$
- **Décroissante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; x < y \to f(x) \geq f(y)$

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Sens de variation ]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est:

- **Constante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; f(x) = f(y)$
- **Croissante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; x < y \to f(x) \leq f(y)$
- **Décroissante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; x < y \to f(x) \geq f(y)$

Les propriétés précédentes définissent le **sens de variation** de $f$ sur $I$.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Sens de variation ]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est:

- **Constante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; f(x) = f(y)$

- **Croissante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; x < y \to f(x) \leq f(y)$

- **Décroissante** sur $I$ si et seulement si $\forall x, y \in I \;\; x < y \to f(x) \geq f(y)$

Les propriétés précédentes définissent le **sens de variation** de $f$ sur $I$.

On dit que $f$ est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si les inégalités correspondantes sont strictes.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

## Définition[Monotonie]

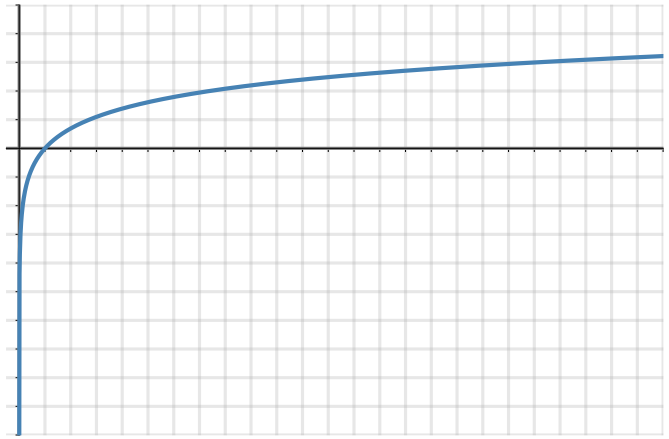
Une fonction $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **monotone** sur $I \subseteq D_f$ si son sens de variation est toujours le même sur $I$.

On dit que $f$ est **strictement monotone** si son sens de variation est strict.

Pour aller plus loin: *cahier-de-prepa.fr / fonctions*

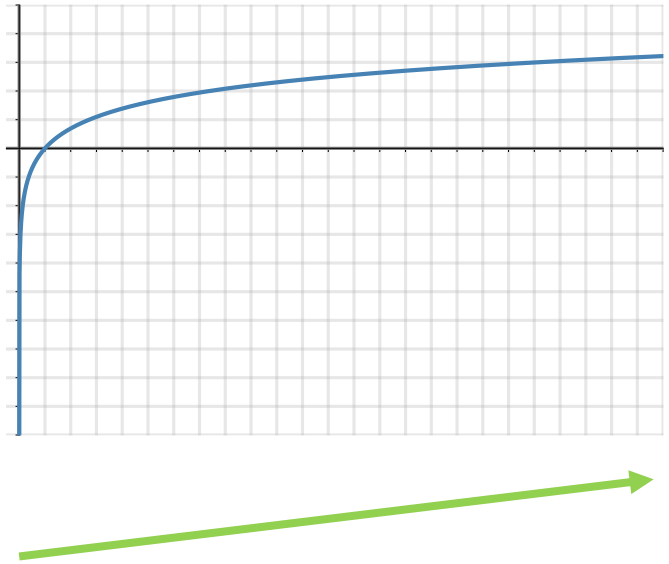
## Exemple[Sens de variation ]

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$



## Exemple[Sens de variation ]

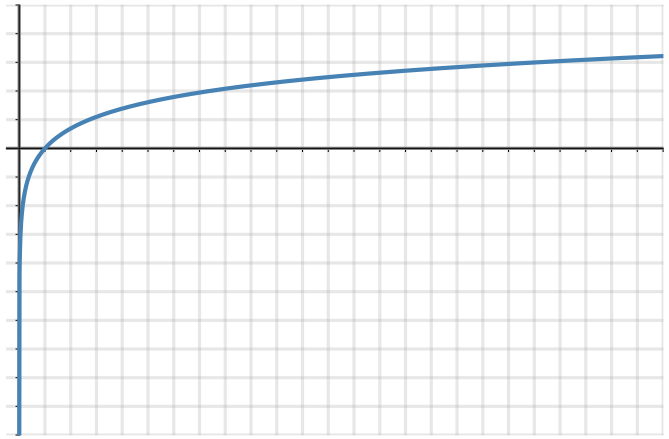
$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$



Monotone
strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

# Exemple[Sens de variation ]

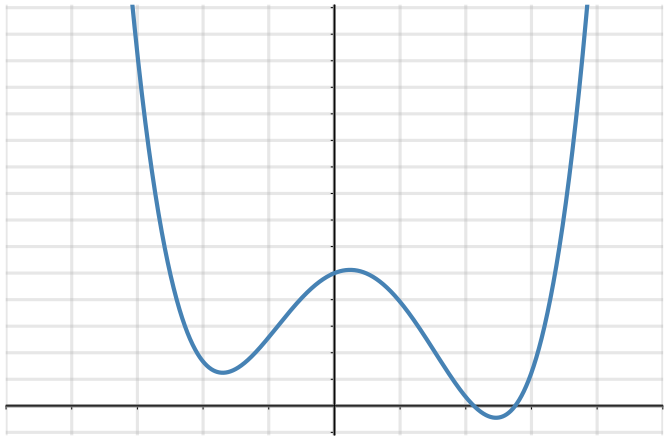
$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$





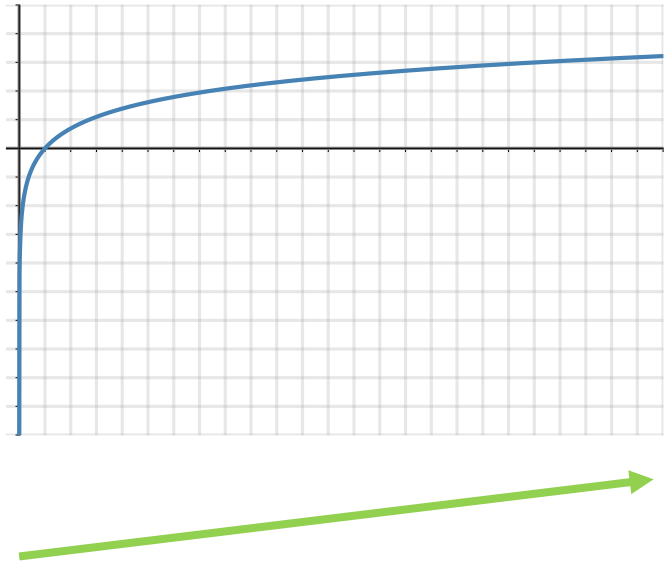
Monotone
strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$



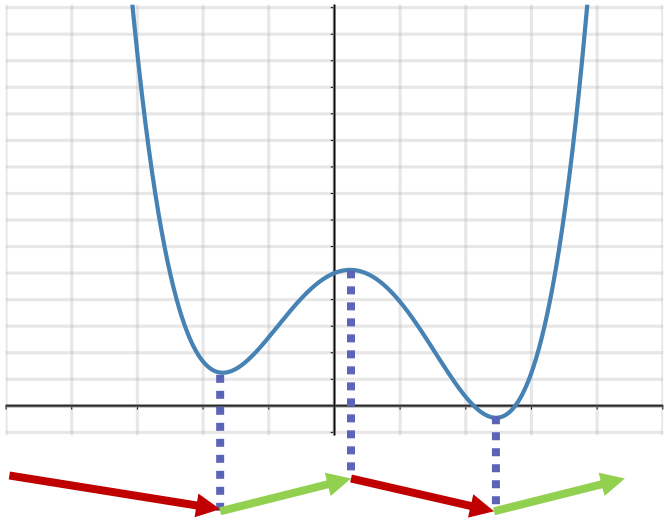
# Exemple[Sens de variation ]

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$



Monotone
strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

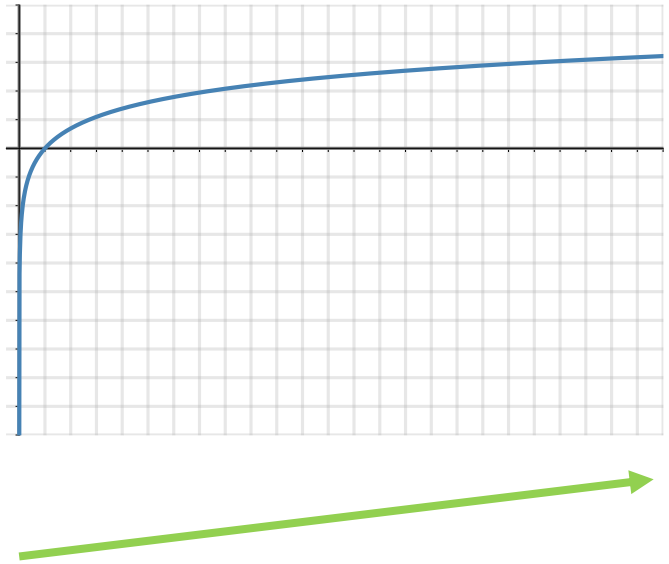
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$



Non monotone sur $\mathbb{R}$

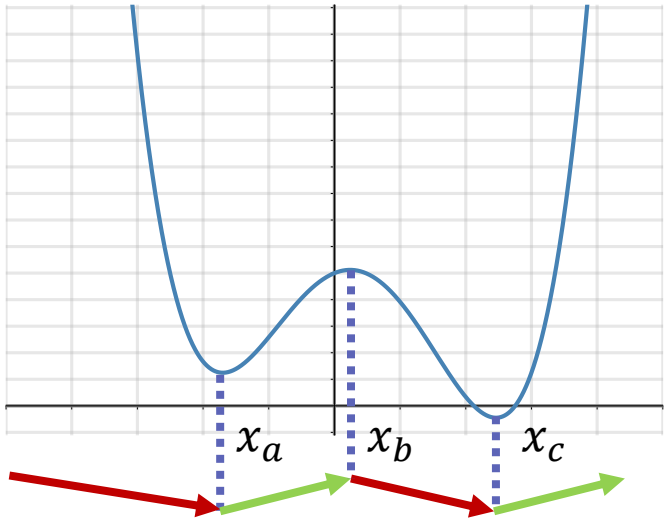
# Exemple[Sens de variation ]

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \log(x)$



Monotone
strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$



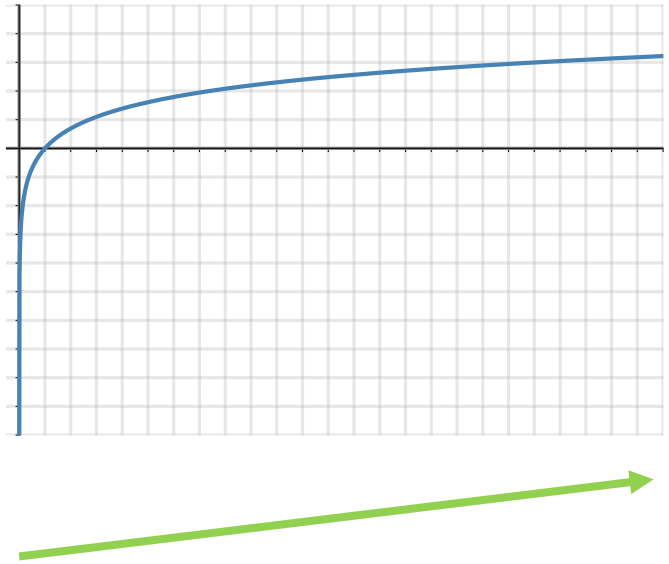

Monotone croissante
sur $[x_a, x_b]$ et $[x_c, +\infty[$

Monotone décroissante
sur $]-\infty, x_a]$et $[x_b, x_c[$

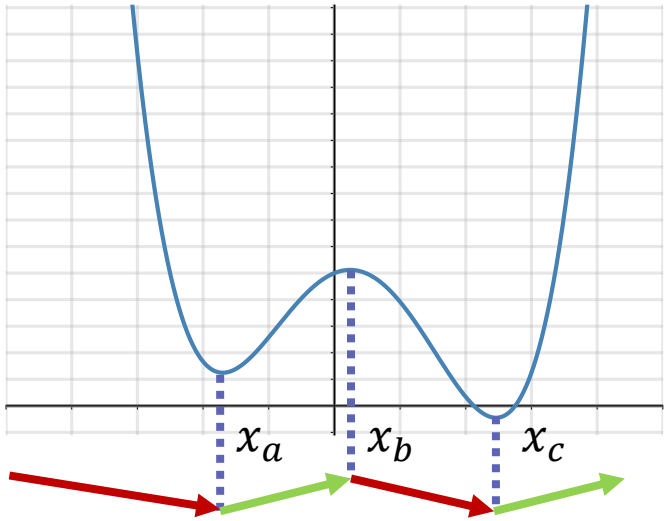
Non monotone sur $\mathbb{R}$

# Exemple[Sens de variation ]

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x)$$



$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$




Détermination / Quantification de la variation ?

## Définition[Taux d'accroissement]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a, x_a + h]$ avec $x_a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x_a + h) \in D_f$.

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Taux d'accroissement]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a, x_a + h]$ avec $x_a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x_a + h) \in D_f$. On appelle **taux d'accroissement** de $f$ sur $I$ le quotient:

$$\tau = \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h}$$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Taux d'accroissement]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a, x_a + h]$ avec $x_a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x_a + h) \in D_f$. On appelle **taux d'accroissement** de $f$ sur $I$ le quotient:

$$\tau = \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h} \quad \begin{matrix} \geq 0 \text{ (croissance)} \\ > 0 \text{ (par définition)} \end{matrix}$$

## Lien[Taux d'accroissement / Sens de variation]

- Si $f$ est croissante sur $I$ alors $\tau \geq 0$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Taux d'accroissement]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a, x_a + h]$ avec $x_a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x_a + h) \in D_f$. On appelle **taux d'accroissement** de $f$ sur $I$ le quotient:

$$\tau = \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h} \quad \begin{matrix} \leq 0 \text{ (décroissance)} \\ > 0 \text{ (par définition)} \end{matrix}$$

## Lien[Taux d'accroissement / Sens de variation]

- Si $f$ est croissante sur $I$ alors $\tau \geq 0$
- Si $f$ est décroissante sur $I$ alors $\tau \leq 0$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Taux d'accroissement]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a, x_a + h]$ avec $x_a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x_a + h) \in D_f$. On appelle **taux d'accroissement** de $f$ sur $I$ le quotient:

$$\tau = \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h} \quad \begin{matrix} = 0 \text{ (constance)} \\ > 0 \text{ (par définition)} \end{matrix}$$

## Lien[Taux d'accroissement / Sens de variation]

- Si $f$ est croissante sur $I$ alors $\tau \geq 0$
- Si $f$ est décroissante sur $I$ alors $\tau \leq 0$
- Si $f$ est constante sur $I$ alors $\tau = 0$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Taux d'accroissement]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a, x_a + h]$ avec $x_a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x_a + h) \in D_f$. On appelle **taux d'accroissement** de $f$ sur $I$ le quotient:

$$\tau = \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h}$$

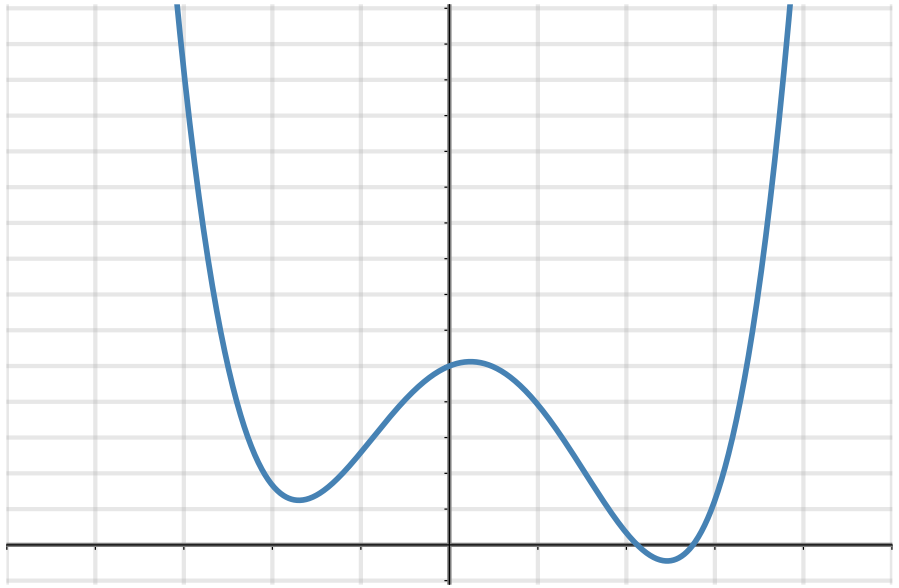
## Lien[Taux d'accroissement / Sens de variation]

- Si $f$ est croissante sur $I$ alors $\tau \geq 0$ (et $\tau > 0$ si $f$ strictement croissante)
- Si $f$ est décroissante sur $I$ alors $\tau \leq 0$ (et $\tau < 0$ si $f$ strictement décroissante)
- Si $f$ est constante sur $I$ alors $\tau = 0$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

# Exemple[Taux d'accroissement]

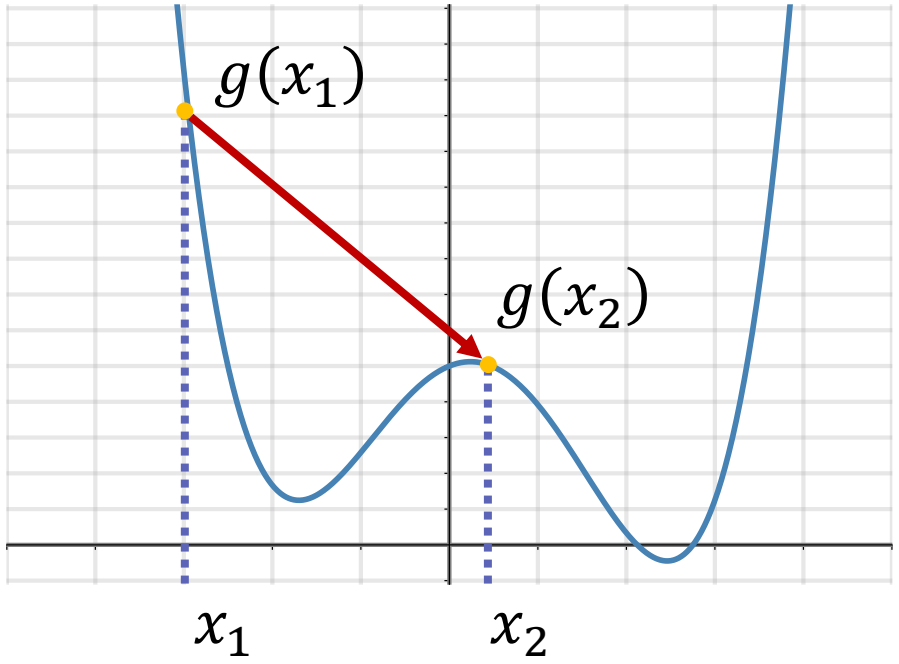
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$



Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

# Exemple[Taux d'accroissement]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

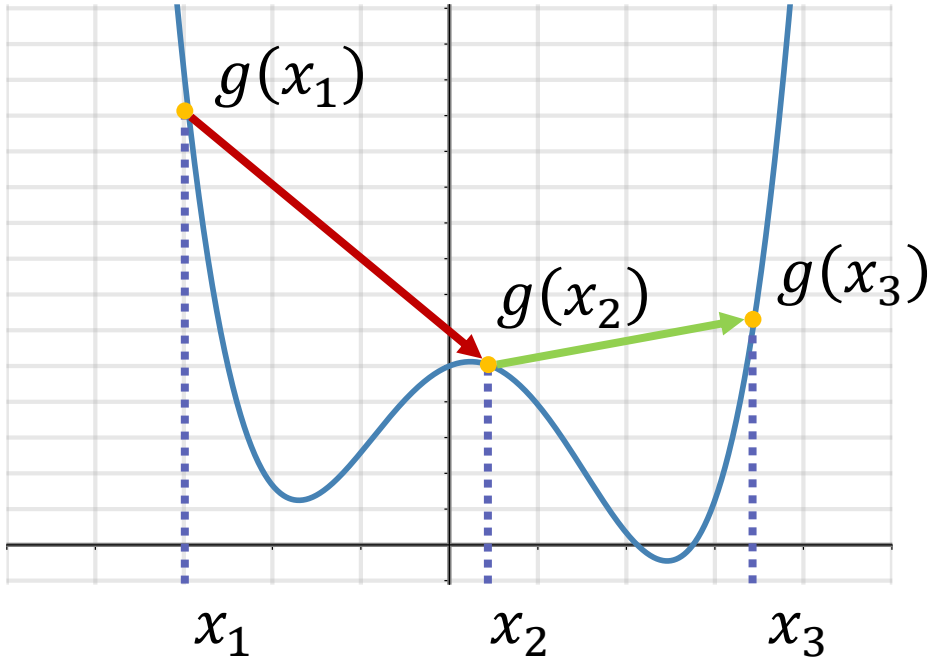



- Si $I = [x_1, x_2]$, $\tau < 0$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

# Exemple[Taux d'accroissement]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

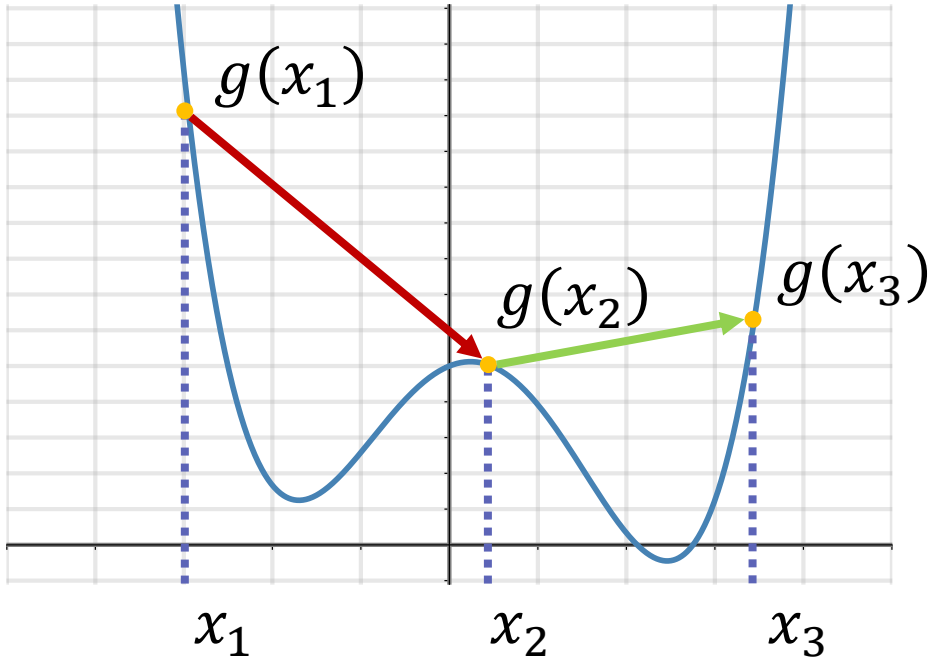



- Si $I = [x_1, x_2], \tau < 0$
- Si $I = [x_2, x_3], \tau > 0$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

# Exemple[Taux d'accroissement]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$



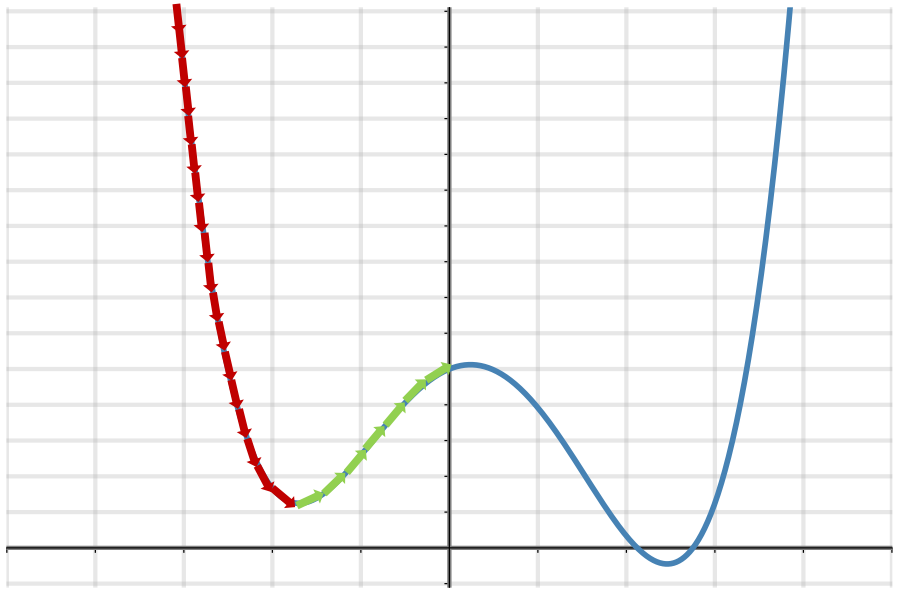

- Si $I = [x_1, x_2], \tau < 0$
- Si $I = [x_2, x_3], \tau > 0$

Le taux d'accroissement ne représente qu'une tendance.

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

# Exemple[Taux d'accroissement]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$



Le taux d'accroissement ne représente qu'une tendance.

Pour être significatif, il faut le calculer sur de petits intervalles

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Limite[Taux d'accroissement]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et son taux d'accroissement en $x_a$:

$$\tau = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}, x_a \in D_f, h \in \mathbb{R}^*, (x_a + h) \in D_f$$

## Limite[Taux d'accroissement]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et son taux d'accroissement en $x_a$:

$$\tau = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}, x_a \in D_f, h \in \mathbb{R}^*, (x_a + h) \in D_f$$

Soit $f'(x_a)$ la valeur de $\tau$ pour l'intervalle le plus petit autour de $x_a$:

$$f'(x_a) = \lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}$$

L'intervalle $I = [x_a, x_a + h]$ se rapproche le plus de $x_a$ quand $h$ tend vers $0$

## Limite[Taux d'accroissement]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et son taux d'accroissement en $x_a$ :

$$\tau = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}, x_a \in D_f, h \in \mathbb{R}^*, (x_a + h) \in D_f$$

Soit $f'(x_a)$ la valeur de $\tau$ pour l'intervalle le plus petit autour de $x_a$ :

$$f'(x_a) = \lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}$$

$$f'(x_a) = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h} - \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ et } \lim_{h\to 0} \varepsilon\,(h) = 0$$

Le quotient est proche de $f'(x_a)$ à un ε près le plus petit possible

# Limite[Taux d'accroissement]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et son taux d'accroissement en $x_a$ :

$$\tau = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}, x_a \in D_f, h \in \mathbb{R}^*, (x_a + h) \in D_f$$

Soit $f'(x_a)$ la valeur de $\tau$ pour l'intervalle le plus petit autour de $x_a$ :

$$f'(x_a) = \lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}$$

$$f'(x_a) = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h} - \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ et } \lim_{h\to 0} \varepsilon\,(h) = 0$$

$$hf'(x_a) = f(x_a + h) - f(x_a) - h\varepsilon(h)$$

Multiplication de l'équation par $h \neq 0$

# Limite[Taux d'accroissement]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et son taux d'accroissement en $x_a$ :

$$\tau = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}, x_a \in D_f, h \in \mathbb{R}^*, (x_a + h) \in D_f$$

Soit $f'(x_a)$ la valeur de $\tau$ pour l'intervalle le plus petit autour de $x_a$ :

$$f'(x_a) = \lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}$$

$$f'(x_a) = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h} - \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ et } \lim_{h\to 0} \varepsilon\,(h) = 0$$

$$hf'(x_a) = f(x_a + h) - f(x_a) - h\varepsilon(h)$$

$$hf'(x_a) + f(x_a) + h\varepsilon(h) = f(x_a + h)$$

Réorganisation des termes

## Limite[Taux d'accroissement]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et son taux d'accroissement en $x_a$:

$$\tau = \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}, x_a \in D_f, h \in \mathbb{R}^*, (x_a + h) \in D_f$$

Soit $f'(x_a)$ la valeur de $\tau$ pour l'intervalle le plus petit autour de $x_a$ .On peut écrire:

$$f'(x_a) = \lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_a+h)-f(x_a)}{h}$$

et

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + f(x_a) + h\varepsilon(h)$$

## Définition[Dérivabilité / Dérivée]

Une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable** en $x_a \in D_f$ si le taux d'accroissement en $x_a$ admet une limite finie.

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Dérivabilité / Dérivée]

Une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable** en $x_a \in D_f$ si le taux d'accroissement en $x_a$ admet une limite finie. Plus formellement:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h} = f'(x_a) \in \mathbb{R}$$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Dérivabilité / Dérivée]

Une fonction $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable** en $x_a \in D_f$ si le taux d'accroissement en $x_a$ admet une limite finie. Plus formellement:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h} = f'(x_a) \in \mathbb{R}$$

On appelle alors **dérivée** de $f$ en $x_a$ la valeur $\boldsymbol{f'(x_a)}$ et il existe une fonction $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ telle que:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a)$$

## Définition[Dérivabilité / Dérivée]

Une fonction $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable** en $x_a \in D_f$ si le taux d'accroissement en $x_a$ admet une limite finie. Plus formellement:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h} = f'(x_a) \in \mathbb{R}$$

On appelle alors **dérivée** de $f$ en $x_a$ la valeur $\boldsymbol{f'(x_a)}$ et il existe une fonction $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$ telle que:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a)$$

## Définition[Point critique (Point stationnaire)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec $f'(x_a) = 0$. On appelle $x_a$ **point critique** (ou **point stationnaire**) de $f$.

## Propriétés[Dérivabilité / Dérivée]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a - h; x_a + h] \subseteq D_f, h \in \mathbb{R}^{*+}$ un intervalle sur lequel $f$ est dérivable.

Pour aller plus loin: https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/marie.derrien/M%C3%A9moire%20le%C3%A7on%20228.pdf

## Propriétés[Dérivabilité / Dérivée]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a - h; x_a + h] \subseteq D_f, h \in \mathbb{R}^{*+}$ un intervalle sur lequel $f$ est dérivable.

- Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors $f$ est croissante sur $I$ (strictement si $f'(x) > 0$)
- Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors $f$ est décroissante sur $I$ (strictement si $f'(x) < 0$)

$f'(x)$ est la valeur de la dérivée de $f$ en $x$

La limite ne change pas le signe du taux d'accroissement
(voir théorème des accroissements finis, admis ici)

Pour aller plus loin: https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/marie.derrien/M%C3%A9moire%20le%C3%A7on%20228.pdf

## Propriétés[Dérivabilité / Dérivée]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a - h; x_a + h] \subseteq D_f, h \in \mathbb{R}^{*+}$ un intervalle sur lequel $f$ est dérivable.

- Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors $f$ est croissante sur $I$ (strictement si $f'(x) > 0$)
- Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors $f$ est décroissante sur $I$ (strictement si $f'(x) < 0$)
- Si $f'(x_a) = 0$ alors $x_a$ est un point critique (stationnaire) de $f$

Par définition

Pour aller plus loin: https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/marie.derrien/M%C3%A9moire%20le%C3%A7on%20228.pdf

## Propriétés[Dérivabilité / Dérivée]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $I = [x_a - h; x_a + h] \subseteq D_f, h \in \mathbb{R}^{*+}$ un intervalle sur lequel $f$ est dérivable.

- Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors $f$ est croissante sur $I$ (strictement si $f'(x) > 0$)
- Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors $f$ est décroissante sur $I$ (strictement si $f'(x) < 0$)
- Si $f'(x_a) = 0$ alors $x_a$ est un point critique (stationnaire) de $f$

## Théorème[Continuité d'une fonction dérivable]

Une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$ est continue en $x_a$.

[Voir Preuve]

## Définition[Fonction Dérivée]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $D_f$. On appelle **fonction dérivée** de $f$ la fonction $f'$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à tout $x \in D_f$ associe $f'(x)$, la dérivée de $f$ en $x$.

## Définition[Fonction Dérivée]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $D_f$. On appelle fonction dérivée de $f$ la fonction $f'$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à tout $x \in D_f$ associe $f'(x)$, la dérivée de $f$ en $x$.

La fonction dérivée de $f$ peut être notée de façon équivalente:

- $f'$ selon Lagrange
- $\frac{df}{dx}$ selon Leibniz

## Définition[Fonction Dérivée]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $D_f$. On appelle **fonction dérivée** de $f$ la fonction $f'$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à tout $x \in D_f$ associe $f'(x)$, la dérivée de $f$ en $x$.

La **fonction dérivée** de $f$ peut être notée de façon équivalente:

- $f'$ selon Lagrange
- $\frac{df}{dx}$ selon Leibniz

On appelle indistinctement **dérivée** la valeur $f'(x)$ et la fonction $f'$.

# Fonctions dérivées usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $c \in \mathbb{R}$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$ | $-\frac{n}{x^{(n+1)}}$ | $\mathbb{R}^*$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $e^{ax}$ $a \in \mathbb{R}$ | $ae^{ax}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\log(x)$ | $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ |

**Attention:** $\log \equiv \ln$

# Opérations et dérivées

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $D_f$ et $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $D_g$.

| Opération | Dérivée | Domaine |
|---|---|---|
| $(f+g)'$ | $f'+g'$ | $D_f \cap D_g$ |
| $(\lambda f)'$ | $\lambda f', \lambda \in \mathbb{R}$ | $D_f$ |
| $(fg)'$ | $f'g+fg'$ | $D_f \cap D_g$ |
| $\left(\frac{1}{g}\right)'$ | $-\frac{g'}{g^2}$ | $D_g \cap \{x \mid g(x) \neq 0\}$ |
| $\left(\frac{f}{g}\right)'$ | $\frac{f'g-fg'}{g^2}$ | $D_f \cap D_g \cap \{x, \mid g(x) \neq 0\}$ |

Intérêt de la notion de dérivée dans la recherche d'extremum ?

## Théorème[Signe de dérivée et extremum local]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ tel que $f$ est dérivable sur $I \setminus \{c\}$.

Il n'est pas nécessaire que $f$ soit dérivable en $c$

## Théorème[Signe de dérivée et extremum local]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ tel que $f$ est dérivable sur $I \setminus \{c\}$.

- Si $f' \leq 0$ sur $]a, c[$ et $f' \geq 0$ sur $]c, b[$ alors $f(c)$ est un minimum local.
- Si $f' \geq 0$ sur $]a, c[$ et $f' \leq 0$ sur $]c, b[$ alors $f(c)$ est un maximum local.
- Si $f' > 0$ sur $]a, c[ \cup ]c, b[$ ou $f' < 0$ sur $]a, c[ \cup ]c, b[$ alors $f$ n'admet pas d'extremum en $c$.

[Voir Preuve]

**Attention:** $f$ peut admettre un extremum local en $c$ sans que $f'$ garde un signe constant de chaque côté de c (fonctions oscillant indéfiniment).

## Exemple[Signe de dérivée et extremum local]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

## Exemple[Signe de dérivée et extremum local]

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$

$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

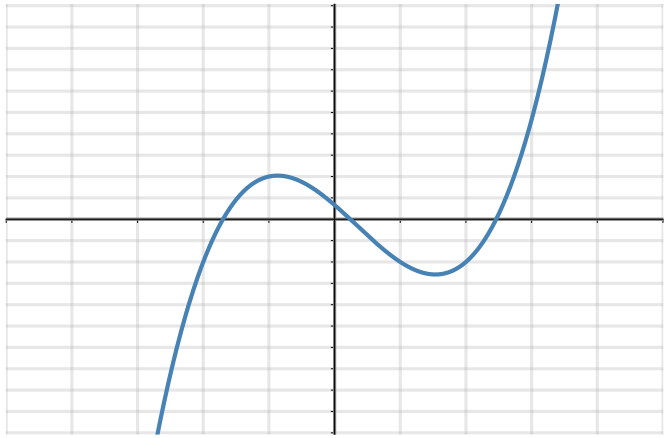
$x \mapsto x^3 - x^2 - 4x + 1$

Dérivées usuelles et opérations

## Exemple[Signe de dérivée et extremum local]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

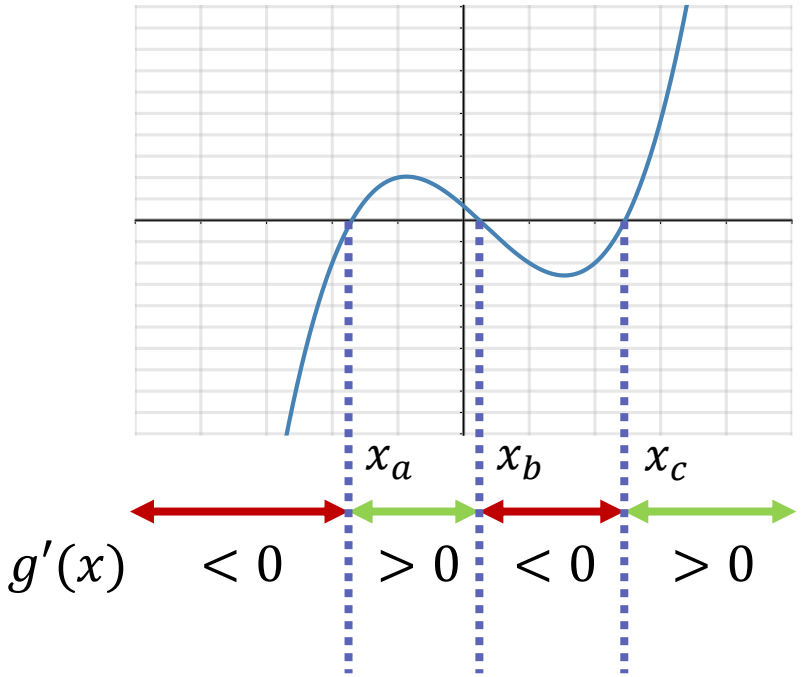
$$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 - x^2 - 4x + 1$$



# Exemple[Signe de dérivée et extremum local]

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

$$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 - x^2 - 4x + 1$$



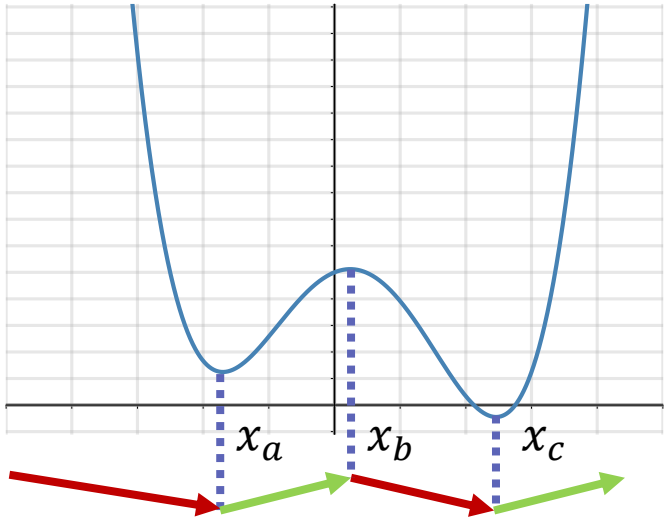
# Exemple[Signe de dérivée et extremum local]

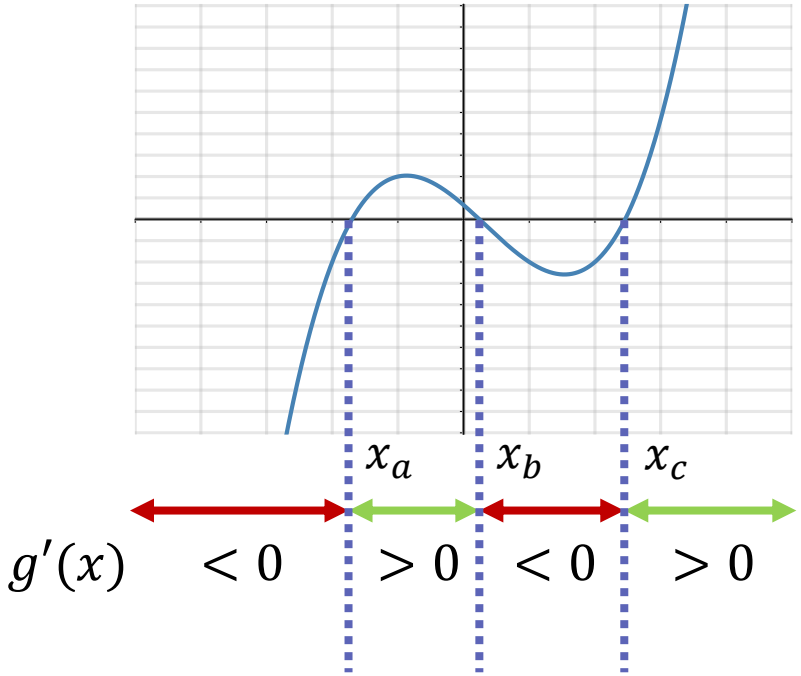
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 - x^2 - 4x + 1$$



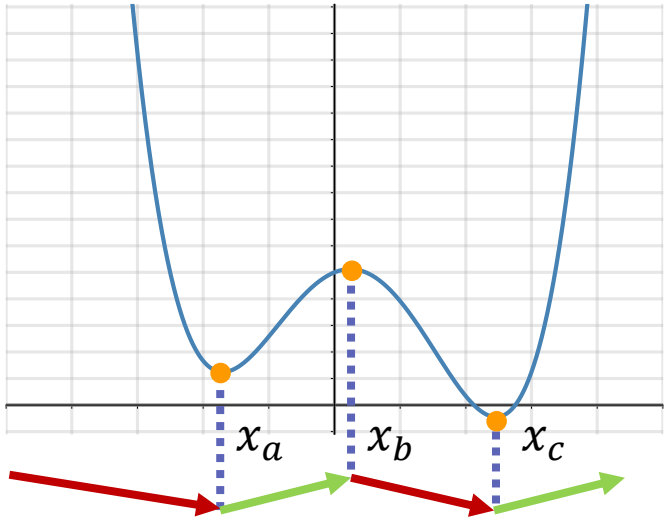
# Exemple[Signe de dérivée et extremum local]

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

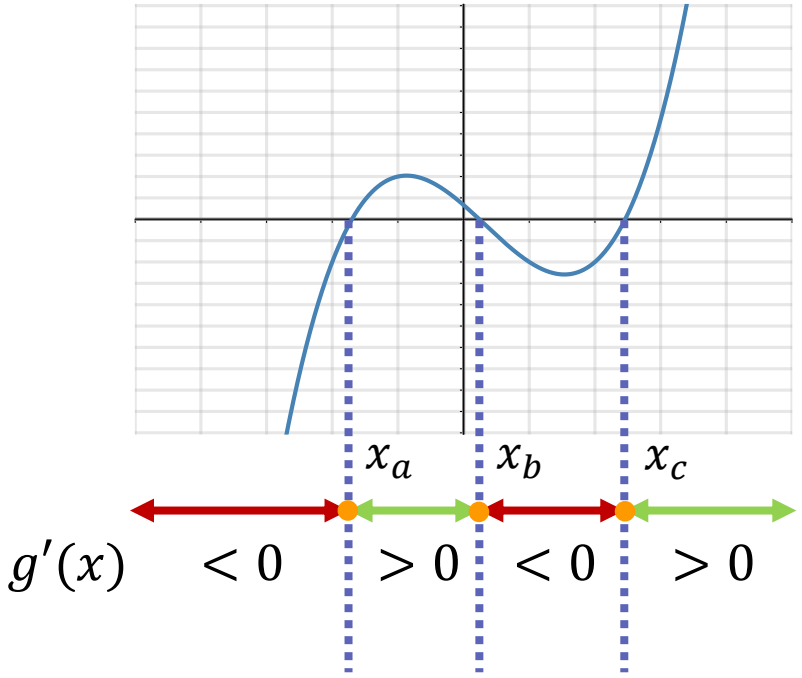
$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 - x^2 - 4x + 1$$




Minimum local: $x_a, x_c$

Maximum local: $x_b$




Quand $g'(x)$ change de signe

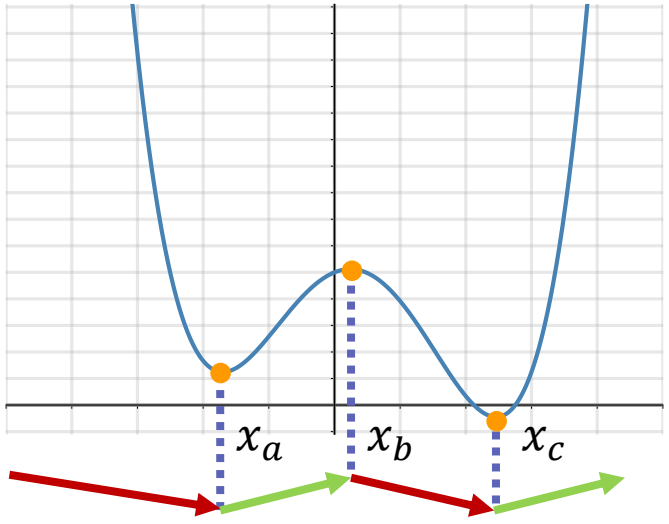
# Exemple[Signe de dérivée et extremum local]

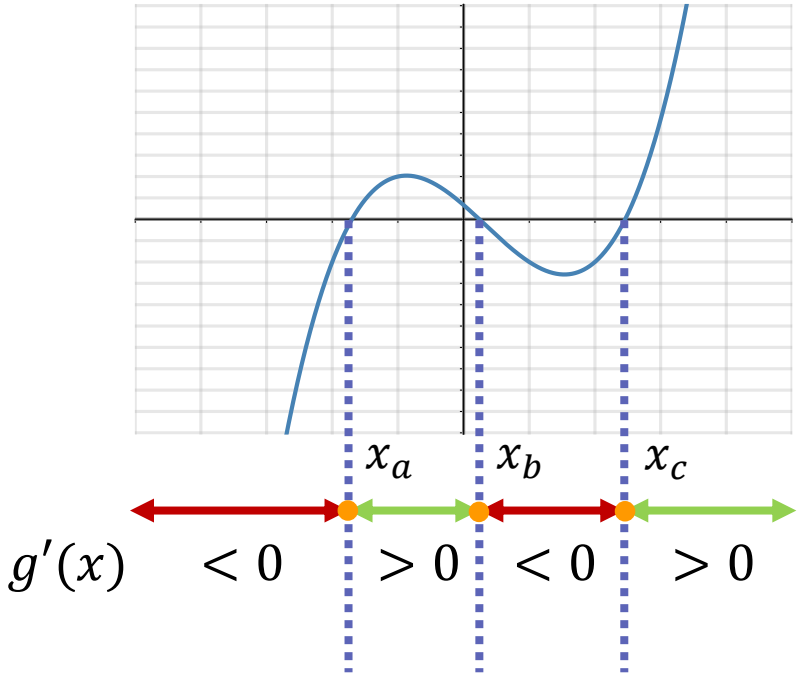
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 5$$

$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 - x^2 - 4x + 1$$




Minimum local: $x_a, x_c$

Maximum local: $x_b$

$g'(x_a) = 0 \quad g'(x_b) = 0 \quad g'(x_c) = 0$

Intuition: À chaque extremum local $x_i$, $g'(x_i) = 0$

**Théorème[Points stationnaires (Fermat)]**

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable. Si $f$ possède un extremum local en $c$ alors $f'(c) = 0$.

[Voir Preuve]

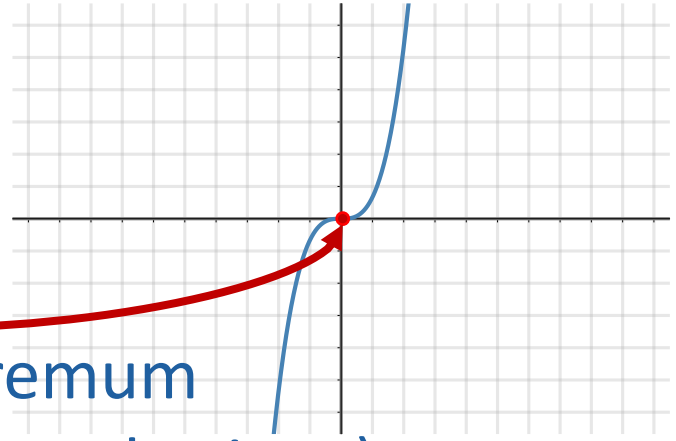
## Théorème[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable. Si $f$ possède un extremum local en $c$ alors $f'(c) = 0$.

## Remarques

- La réciproque du théorème est fausse

$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$



N'est pas un extremum
(cas 3 du théorème du signe)

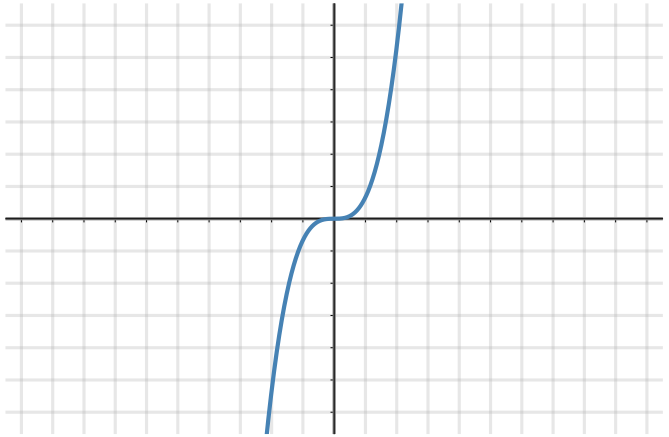
## Théorème[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable. Si $f$ possède un extremum local en $c$ alors $f'(c) = 0$.

## Remarques

- La réciproque du théorème est fausse

  $f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$



- Ne s'applique qu'aux fonctions dérivables

- Ne s'applique pas aux bornes

# Recherche d'extremum

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

# Recherche d'extremum

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

A. sur tout $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ où f est dérivable:

1. Déterminer $f'$
2. Rechercher tous les $x_i \in I$ tels que $f'(x_i) = 0$
3. Vérifier si $f'$ change de signe au voisinage de $x_i$

# Recherche d'extremum

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

A. sur tout $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ où f est dérivable:

1. Déterminer $f'$
2. Rechercher tous les $x_i \in I$ tels que $f'(x_i) = 0$
3. Vérifier si $f'$ change de signe au voisinage de $x_i$

B. Traiter les points non couverts par Fermat:

1. Vérifier les bornes de $D_f$
2. Vérifier les $x_f \in D_f$ pour lesquels $f$ n'est pas dérivable

La nature de $f$ est importante

# Recherche d'extremum

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

A. sur tout $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ où f est dérivable:

1. Déterminer $f'$
2. Rechercher tous les $x_i \in I$ tels que $f'(x_i) = 0$
3. Vérifier si $f'$ change de signe au voisinage de $x_i$

B. Traiter les points non couverts par Fermat:

1. Vérifier les bornes de $D_f$
2. ~~Vérifier les $x_f \in D_f$ pour lesquels $f$ n'est pas dérivable~~

$f$ dérivable sur $D_f$

La nature de $f$ est importante

# Recherche d'extremum

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

A. sur tout $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ où f est dérivable:

1. Déterminer $f'$
2. Rechercher tous les $x_i \in I$ tels que $f'(x_i) = 0$
3. Vérifier si $f'$ change de signe au voisinage de $x_i$

~~B. Traiter les points non couverts par Fermat:~~

~~1. Vérifier les bornes de $D_f$~~ Limites de $f$ connues aux bornes de $D_f$

~~2. Vérifier les $x_n \in D_f$ pour lesquels $f$ n'est pas dérivable~~

$f$ dérivable sur $D_f$

La nature de $f$ est importante

## Recherche d'extremum

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $D_f$ dont les limites aux bornes de $D_f$ sont connues:

1. Déterminer $f'$
2. Rechercher tous les $x_i \in D_f$ tels que $f'(x_i) = 0$
3. Vérifier si $f'$ change de signe au voisinage de $x_i$
4. Vérifier les limites

# Recherche d'extremum

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $D_f$ dont les limites aux bornes de $D_f$ sont connues:

1. Déterminer $f'$
2. Rechercher tous les $x_i \in D_f$ tels que $f'(x_i) = 0$
3. Vérifier si $f'$ change de signe au voisinage de $x_i$
4. Vérifier les limites

Ne détermine que des extrema locaux

Minimiser = trouver un minimum global

## Recherche de minimum

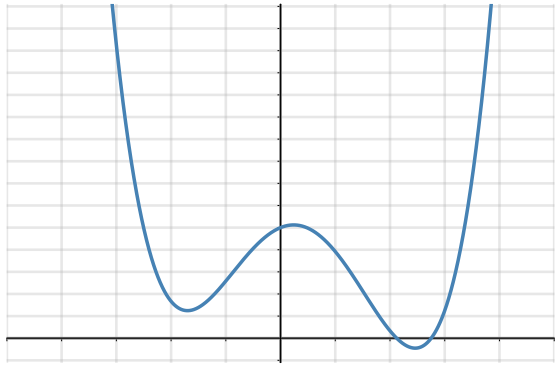
Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la dérivée $f'$ est définie sur $D_f$ et dont les limites $l_-$ et $l_+$ aux bornes de $D_f$ sont connues:

1. Calculer $C = \{ x_i \in D_f \mid f'(x_i) = 0 \}$
2. Calculer $E = \{x_e \in C \mid f'$ passe de < 0 à > 0 au voisinage de $x_e\}$
3. Calculer $m = min(\{f(x_e) \mid x_e \in E\})$
4. Si $m \leq l_-$ et $m \leq l_+$ alors il est le minimum global

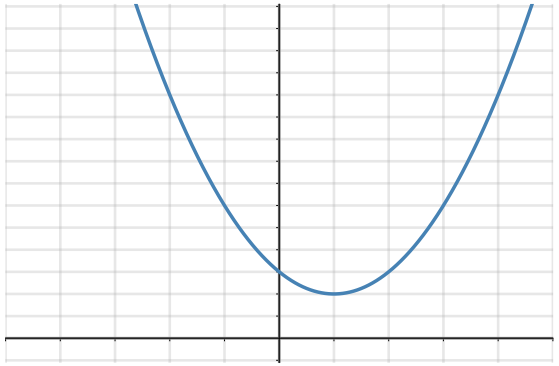
# Recherche de minimum

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée $f'$ est définie sur $D_f$ et dont les limites $l_-$ et $l_+$ aux bornes de $D_f$ sont connues:

1. Calculer $C = \{ x_i \in D_f \mid f'(x_i) = 0 \}$
2. Calculer $E = \{x_e \in C \mid f'$ passe de < 0 à > 0 au voisinage de $x_e\}$
3. Calculer $m = min(\{f(x_e) \mid x_e \in E\})$
4. Si $m \leq l_-$ et $m \leq l_+$ alors il est le minimum global



Plusieurs minima locaux



Un seul minimum global

Existe-t-il des fonctions adaptées à cette recherche ?

## Définition[Fonction convexe]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est **convexe** sur $I$ si:

$$\forall x, y \in I \ \forall \lambda \in [0,1] \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$f$ est **strictement convexe** si:

$$\forall x, y \in I \ x \neq y \ \forall \lambda \in ]0,1[ \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

## Définition[Fonction convexe]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est **convexe** sur $I$ si:

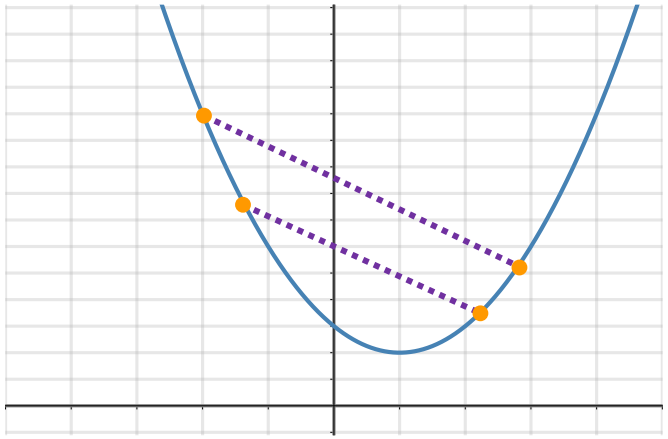
$$\forall x, y \in I \ \forall \lambda \in [0,1] \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$f$ est **strictement convexe** si:

$$\forall x, y \in I \ x \neq y \ \forall \lambda \in ]0,1[ \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

## Interprétation[Fonction convexe]

Tout segment $[(x, f(x)) \ (y, f(y))]$ se trouve au-dessus de la courbe de $f$.



## Propriété[Fonction convexe / dérivée]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est convexe (resp. strictement convexe) sur $I$ si et seulement si sa dérivée $f'$ est croissante (resp. strictement croissante) sur $I$.

[Voir Preuve]

## Propriété[Fonction convexe / dérivée]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle $I \subseteq D_f$. La fonction $f$ est convexe (resp. strictement convexe) sur $I$ si et seulement si sa dérivée $f'$ est croissante (resp. strictement croissante) sur $I$.

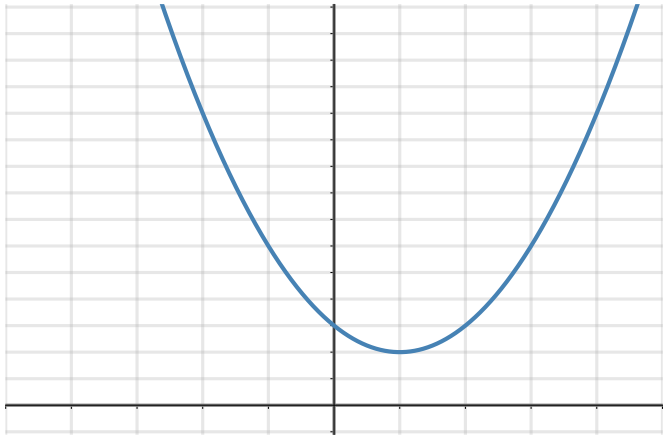
@faire: lien vers la preuve

## Remarque[Fonction convexe / dérivée]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $I \subseteq D_f$ de dérivée $f'$ et soit $f'$ elle-même dérivable sur $I$ de dérivée $f''$. La fonction $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f'' \geq 0$ sur $I$. De plus, si $f'' > 0$ sur $I$ alors $f$ est strictement convexe sur $I$ (la réciproque étant fausse).

# Exemple[Fonction convexe]

$$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (x-1)^2 + 2$$

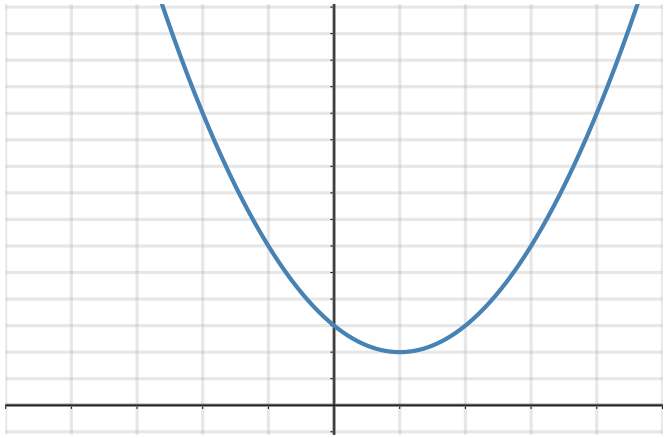


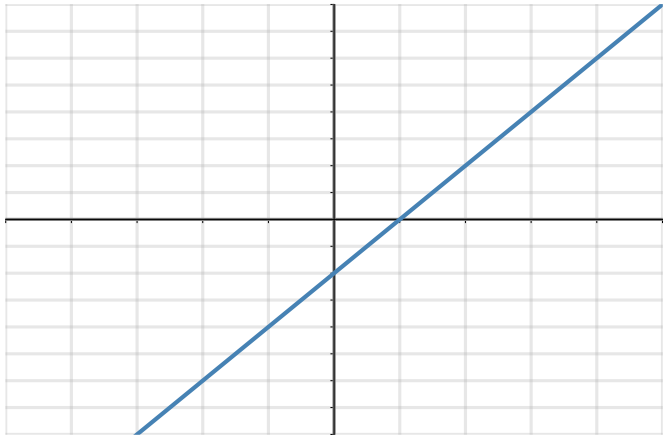
$$D_k = \mathbb{R}$$

# Exemple[Fonction convexe]

$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x-1)^2 + 2$

$k'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 2$





$D_k = \mathbb{R}$

$D_{k'} = \mathbb{R}$

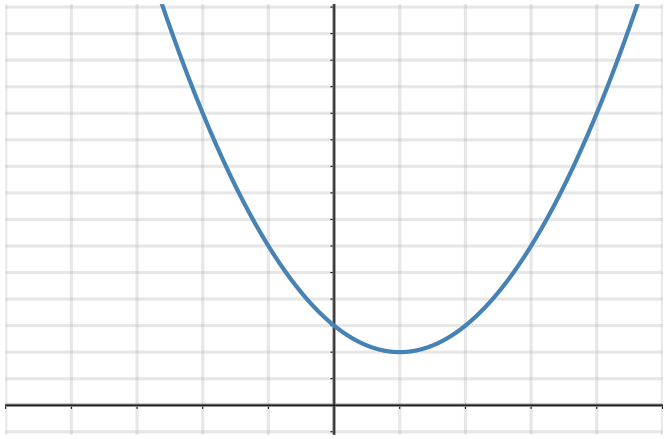
Dérivée

# Exemple[Fonction convexe]

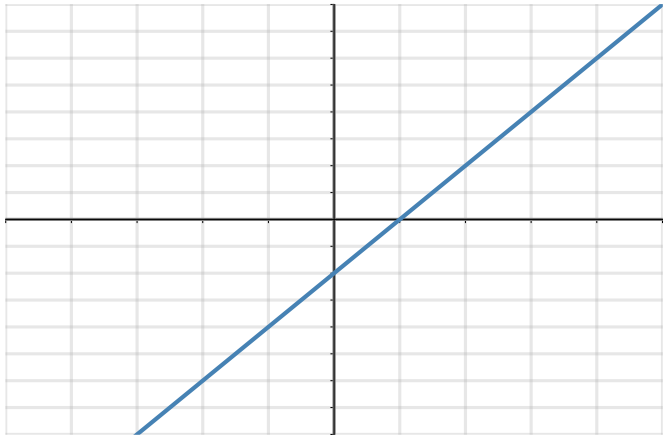
$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x-1)^2 + 2$

$k'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 2$

$k''\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2$



$D_k = \mathbb{R}$



$D_{k'} = \mathbb{R}$

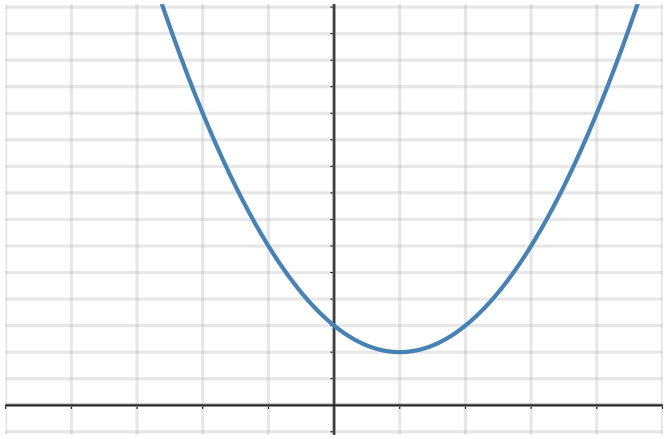


$D_{k''} = \mathbb{R}$

Dérivée

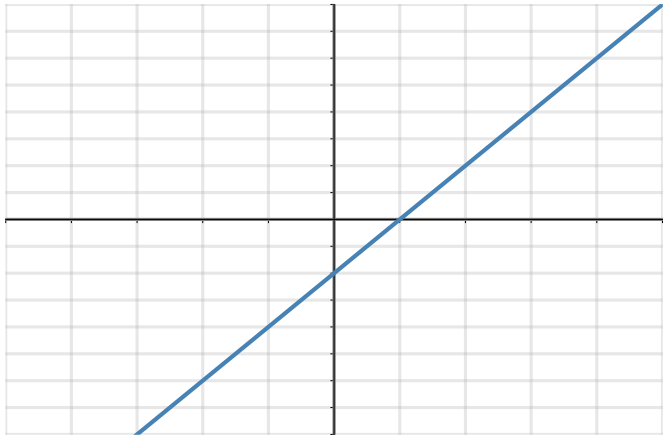
# Exemple[Fonction convexe]

$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x-1)^2 + 2$



$D_k = \mathbb{R}$

$k'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 2$



$D_{k'} = \mathbb{R}$

$k''\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2$



$D_{k''} = \mathbb{R}$

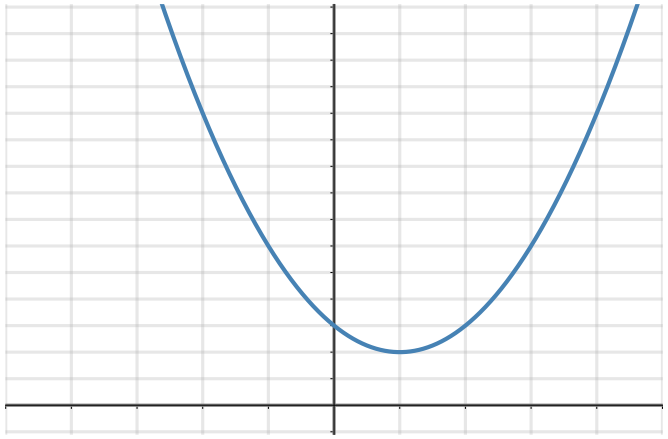
$k'' > 0$

# Exemple[Fonction convexe]

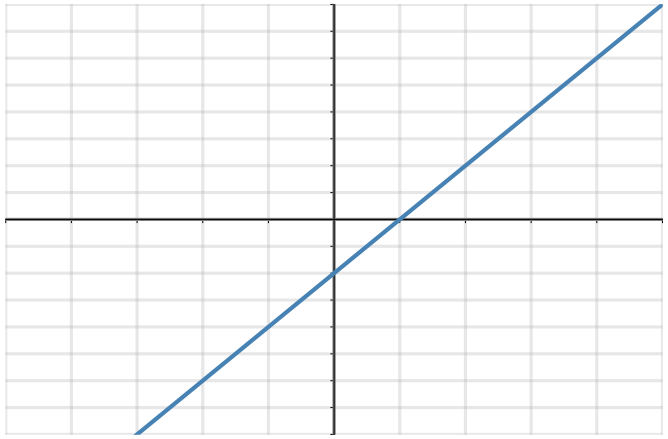
$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x-1)^2 + 2$

$k'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 2$

$k''\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2$



$D_k = \mathbb{R}$



$D_{k'} = \mathbb{R}$



$D_{k''} = \mathbb{R}$

$k'$ strictement croissante

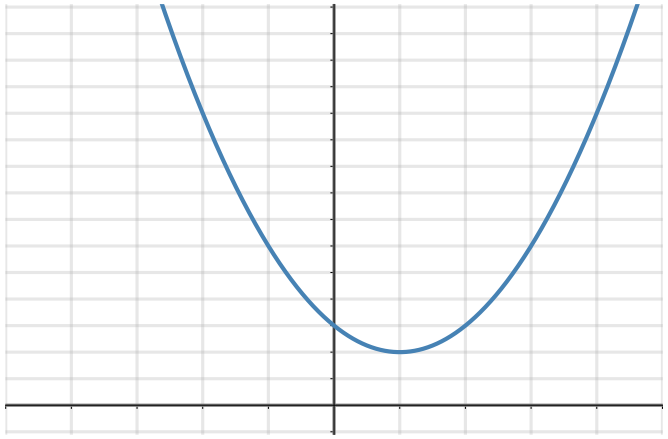
$k'' > 0$

# Exemple[Fonction convexe]

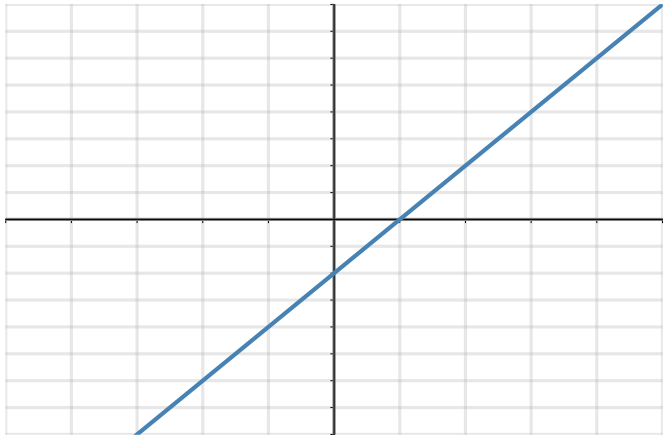
$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x-1)^2 + 2$

$k'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 2$

$k''\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2$



$D_k = \mathbb{R}$



$D_{k'} = \mathbb{R}$



$D_{k''} = \mathbb{R}$

$k$ strictement convexe

$k'$ strictement croissante

$k'' > 0$

## Théorème[Minimum d'une fonction convexe]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur un intervalle $I \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$. La fonction $f$ admet en $c$ un minimum global sur $I$.

[Voir Preuve]

## Théorème[Minimum d'une fonction convexe]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur un intervalle $I \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$. La fonction $f$ admet en $c$ un minimum global sur $I$.

[Voir Preuve]

## Remarque[Minimum d'une fonction convexe]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe sur un intervalle $I \subseteq D_f$. Tout minimum local de $f$ est un minimum global.

## Recherche de minimum

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur un intervalle $I \subseteq D_f$:

1. Calculer $C = \{ x_i \in I \mid f'(x_i) = 0\}$
2. Pour tout $x_i \in C$, $f(x_i)$ est un minimum global

# Recherche de minimum

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur un intervalle $I \subseteq D_f$:

1. Calculer $C = \{ x_i \in I \mid f'(x_i) = 0\}$
2. Pour tout $x_i \in C$, $f(x_i)$ est un minimum global

Nécessite de résoudre $f' = 0$

Si $f(x) = \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$, comment calculer $f'$ efficacement ?

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + e^{-x}$$

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$\sigma(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

**Attention:** On applique d'abord $v$ puis $u$

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$\sigma(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$D_\sigma = D_{u\circ v} = \{x \in D_v \mid v(x) \in D_u\}$$

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$\sigma(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$D_\sigma = D_{u\circ v} = \{x \in D_v \mid v(x) \in D_u\}$$

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$\sigma(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$D_\sigma = D_{u\circ v} = \{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \in \mathbb{R}^*\}$$

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$\sigma(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$D_\sigma = D_{u\circ v} = \{x \in \mathbb{R} \mid v(x) \in \mathbb{R}^*\}$$

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$\sigma(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$D_\sigma = D_{u\circ v} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + e^{-x} \in \mathbb{R}^*\}$$

## Définition[Composition de fonctions]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle **composée de $f$ par $g$**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Son ensemble de définition est alors $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

## Exemple[Composition de fonctions]

$$u\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$\sigma(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$D_\sigma = D_{u\circ v} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + e^{-x} \in \mathbb{R}^*\} = \mathbb{R}$$

Car $\forall x \in \mathbb{R}\ 1 + e^{-x} \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$

**Théorème[Dérivation de fonctions composées (Chain rule)]**

Soient $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $Im(f) \subseteq D_g$ et soit $x_a \in D_f$.

**Théorème[Dérivation de fonctions composées (Chain rule)]**

Soient $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g$: $D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $Im(f) \subseteq D_g$ et soit $x_a \in D_f$.
Si $f$ est dérivable en $x_a$ et $g$ est dérivable en $f(x_a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en $x_a$ et:

$$(g \circ f)'(x_a) = g'\big(f(x_a)\big) \times f'(x_a)$$

[Voir Preuve]

## Théorème[Dérivation de fonctions composées (Chain rule)]

Soient $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g$: $D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $Im(f) \subseteq D_g$ et soit $x_a \in D_f$.
Si $f$ est dérivable en $x_a$ et $g$ est dérivable en $f(x_a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en $x_a$ et:

$$(g \circ f)'(x_a) = g'\big(f(x_a)\big) \times f'(x_a)$$

## Propriété[Fonction dérivée de fonctions composées]

Si $f$ est dérivable sur $D_f$ et $g$ est dérivable sur $D_g$ alors:

$$\boldsymbol{(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'}$$

Soit en notation de Leibniz:

$$\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{df} \times \frac{df}{dx}$$

## Extension[Fonction dérivée de fonctions composées]

Soit $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ la composition de $n$ fonctions $f_i : D_{f_i} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ telles que toute $f_i$ est dérivable sur $D_{f_i}$ et $Im(f_j) \subseteq D_{f_{j-1}}, 2 \leq j \leq n$.

## Extension[Fonction dérivée de fonctions composées]

Soit $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ la composition de $n$ fonctions $f_i : D_{f_i} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ telles que toute $f_i$ est dérivable sur $D_{f_i}$ et $Im(f_j) \subseteq D_{f_{j-1}}, 2 \leq j \leq n$.

La fonction dérivée de $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ est telle que pour $2 \leq k < n$:

$$(f_1 \circ \cdots \circ f_n)'(x) = f_1'(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) \times \cdots \times f_k'(f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n(x)) \times \cdots \times f_n'(x)$$

## Extension[Fonction dérivée de fonctions composées]

Soit $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ la composition de $n$ fonctions $f_i : D_{f_i} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ telles que toute $f_i$ est dérivable sur $D_{f_i}$ et $Im(f_j) \subseteq D_{f_{j-1}}, 2 \leq j \leq n$.

La fonction dérivée de $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ est telle que pour $2 \leq k < n$:

$$(f_1 \circ \cdots \circ f_n)'(x) = f_1'(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) \times \cdots \times f_k'(f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n(x)) \times \cdots \times f_n'(x)$$

Soit en notation de Leibniz:

$$\frac{d(f_1 \circ \cdots \circ f_n)}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \cdots \times \frac{df_k}{df_{k+1}} \times \cdots \times \frac{df_n}{dx}$$

Où $\frac{df_k}{df_{k+1}}$ désigne la dérivée de $f_k$ évaluée en $f_{k+1}$

Preuve par récurrence avec $f \circ g \circ h \equiv f \circ (g \circ h)$

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1, +\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

Définitions générales

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

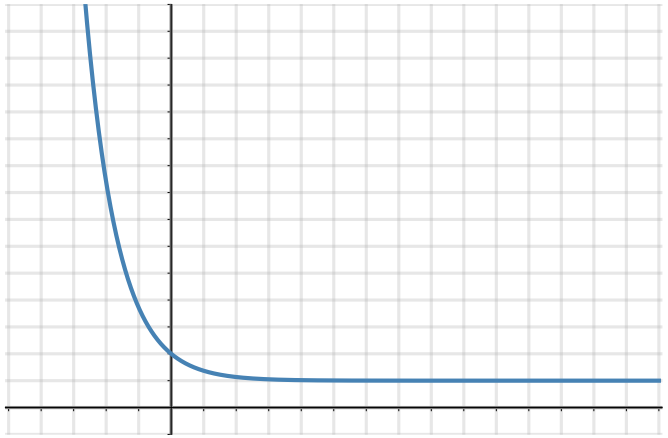
$f_2\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3\colon \mathbb{R} \to ]1, +\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$D_{f_3} = \mathbb{R}$

$Im(f_3) = ]1, +\infty[$



Définitions restreintes à la composition

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f_1: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1, +\infty[ \to \mathbb{R}^*$$
$$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1, +\infty[$$
$$x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$D_{f_2} = ]1, +\infty[ \subseteq \mathbb{R}^*$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$Im(f_3) = ]1, +\infty[$$

Définitions restreintes à la composition

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2\colon ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3\colon \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

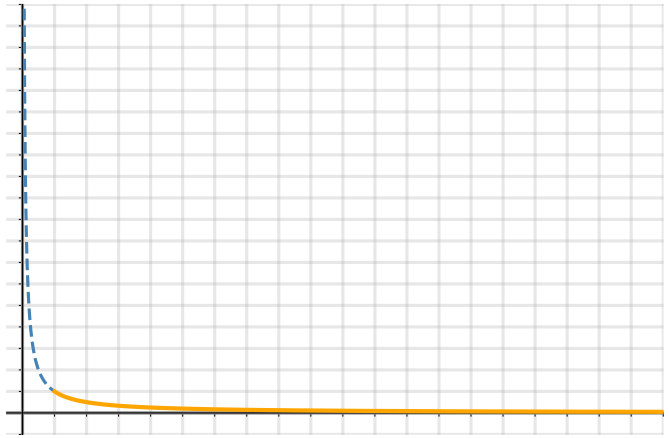
$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$D_{f_2} = ]1,+\infty[$

$Im(f_2) = ]0,1[$

$D_{f_3} = \mathbb{R}$

$Im(f_3) = ]1,+\infty[$



Définitions restreintes à la composition

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$D_{f_1} = ]0,1[ \subseteq \mathbb{R}_+^*$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$D_{f_2} = ]1,+\infty[$

$Im(f_2) = ]0,1[$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$D_{f_3} = \mathbb{R}$

$Im(f_3) = ]1,+\infty[$

Définitions restreintes à la composition

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^*$$
$$f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$D_{f_1} = ]0,1[$$

$$Im(f_1) = \mathbb{R}_-^*$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$$
$$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

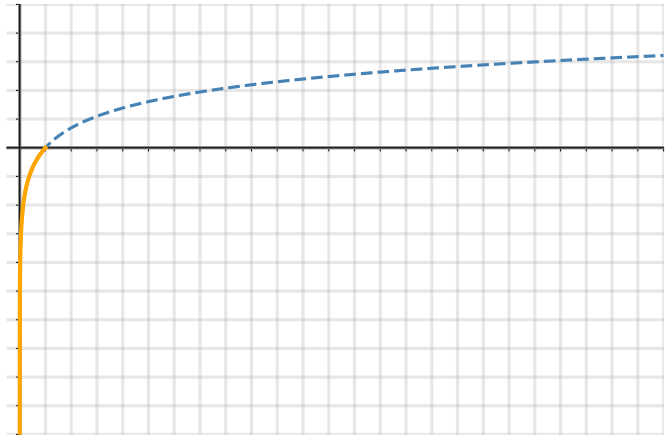
$$D_{f_2} = ]1,+\infty[$$

$$Im(f_2) = ]0,1[$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$$
$$x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$Im(f_3) = ]1,+\infty[$$



Définitions restreintes à la composition

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$D_f = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_-^*$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^*$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$D_{f_1} = ]0,1[$

$Im(f_1) = \mathbb{R}_-^*$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

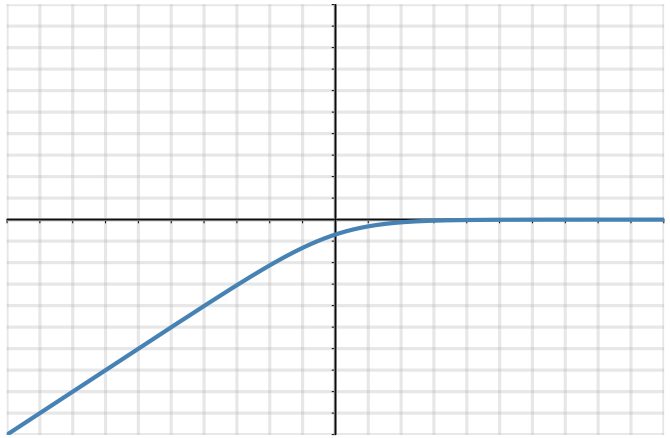
$D_{f_2} = ]1,+\infty[$

$Im(f_2) = ]0,1[$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$D_{f_3} = \mathbb{R}$

$Im(f_3) = ]1,+\infty[$



Caractérisation de $f$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^* \quad x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^* \quad f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[ \quad f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[ \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$D_{f_1} = ]0,1[$ $\subseteq$ $D_{f_2} = ]1,+\infty[$ $\subseteq$ $D_{f_3} = \mathbb{R}$

$Im(f_1) = \mathbb{R}_-^*$ $Im(f_2) = ]0,1[$ $Im(f_3) = ]1,+\infty[$

$$Im(f_j) \subseteq D_{f_{j-1}}, 2 \leq j \leq 3$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^*$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$D_{f_1} = ]0,1[$ $\subseteq$ $D_{f_2} = ]1,+\infty[$ $\subseteq$ $D_{f_3} = \mathbb{R}$

$Im(f_1) = \mathbb{R}_-^*$ $Im(f_2) = ]0,1[$ $Im(f_3) = ]1,+\infty[$

Dérivable sur $D_{f_1}$ Dérivable sur $D_{f_2}$ Dérivable sur $D_{f_3}$

$Im(f_j) \subseteq D_{f_{j-1}}, 2 \leq j \leq 3$ et $f_i$ dérivable sur $D_{f_i}, 1 \leq i \leq 3$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^*$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$D_{f_1} = ]0,1[$ $\subseteq$ $D_{f_2} = ]1,+\infty[$ $\subseteq$ $D_{f_3} = \mathbb{R}$

$Im(f_1) = \mathbb{R}_-^*$ $Im(f_2) = ]0,1[$ $Im(f_3) = ]1,+\infty[$

Dérivable sur $D_{f_1}$ Dérivable sur $D_{f_2}$ Dérivable sur $D_{f_3}$

$Im(f_j) \subseteq D_{f_{j-1}}, 2 \leq j \leq 3$ et $f_i$ dérivable sur $D_{f_i}, 1 \leq i \leq 3$

Les conditions pour la dérivation de fonction composée sont satisfaites

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^* \quad x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^* \quad f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[ \quad f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[ \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx}$$

Dérivation de fonction composée

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^*$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx}$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \log(f_2)' = \frac{1}{f_2}$$

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_- \quad x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_- \quad f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[ \quad f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[ \quad x \mapsto 1+e^{-x}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx}$$

$$\frac{df_2}{df_3} = \left(\frac{1}{f_3}\right)' = -\frac{1}{{f_3}^2}$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_- \quad x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_- \quad f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[ \quad f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[ \quad x \mapsto 1+e^{-x}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx}$$

$$\frac{df_3}{dx} = (1+e^{-x})'$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_- \quad x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_- \quad f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[ \quad f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[ \quad x \mapsto 1 + e^{-x}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx}$$

$$\frac{df_3}{dx} = (1 + e^{-x})' = (1)' + (e^{-x})'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_-$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx}$$

$$\frac{df_3}{dx} = (1 + e^{-x})' = (1)' + (e^{-x})' = 0 + (-e^{-x}) = -e^{-x}$$

$$(c)' = 0$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^*$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$

$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x}$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_-$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$

$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2}$$

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_-$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$

$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = f_3 \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{\frac{1}{f_3}} = f_3$$

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^*$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$

$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{f_3}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{e^{-x}}{f_3}$$

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_-$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$

$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = f_3 \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{e^{-x}}{f_3} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$f_3 = 1 + e^{-x}$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_-$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$

$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = f_3 \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{e^{-x}}{f_3} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1 + e^{-x} - 1}{1 + e^{-x}}$$

$e^{-x} = 1 + e^{-x} - 1$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^* \quad x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}_-^* \quad f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[ \quad f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[ \quad x \mapsto 1+e^{-x}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$$

$$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = f_3 \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{e^{-x}}{f_3} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}} = \frac{(1+e^{-x})-1}{1+e^{-x}}$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_- \quad x \mapsto \log\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_- \quad f_2 \mapsto \log(f_2)$$

$$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[ \quad f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$$

$$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[ \quad x \mapsto 1+e^{-x}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$$

$$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = f_3 \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{e^{-x}}{f_3} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}} = \frac{(1+e^{-x})-1}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-x}}$$

## Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_-$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$

$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = f_3 \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{e^{-x}}{f_3} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}} = \frac{(1+e^{-x})-1}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 - \frac{1}{1+e^{-x}}$$

# Exemple[Fonction dérivée de fonctions composées]

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_-$
$x \mapsto \log(\frac{1}{1+e^{-x}})$

$f_1: ]0,1[ \to \mathbb{R}^*_-$
$f_2 \mapsto \log(f_2)$

$f_2: ]1,+\infty[ \to ]0,1[$
$f_3 \mapsto \frac{1}{f_3}$

$f_3: \mathbb{R} \to ]1,+\infty[$
$x \mapsto 1 + e^{-x}$

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{df_2}{df_3} = -\frac{1}{{f_3}^2}$$

$$\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \times \frac{df_2}{df_3} \times \frac{df_3}{dx} = \frac{1}{f_2} \times -\frac{1}{{f_3}^2} \times -e^{-x} = \frac{1}{f_2} \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = f_3 \times \frac{e^{-x}}{{f_3}^2} = \frac{e^{-x}}{f_3} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}} = \frac{(1+e^{-x})-1}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 - \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$\frac{df}{dx} = 1 - \sigma(x) \quad \text{avec} \quad \sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad \text{(Sigmoïde)}$$

# Fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

# Fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\frac{1}{1+e^{-z^{(k)}}}\right) + \left(1-t^{(k)}\right)\log\left(1-\frac{1}{1+e^{-z^{(k)}}}\right)$$

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{1+e^{-z^{(k)}}}$$

Fonction d'activation

# Fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\frac{1}{1+e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} w_i + b}}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \frac{1}{1+e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} w_i + b}}\right)$$

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{1+e^{-z^{(k)}}}$$ Fonction d'activation

$$z^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} w_i + b$$ Fonction d'agrégation

# Fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\frac{1}{1+e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} w_i + b}}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \frac{1}{1+e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} w_i + b}}\right)$$

Il ne s'agit pas d'une fonction réelle mais d'une fonction réelle à plusieurs variables

## Définition[Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels $X = (x_1, \dots, x_n)$ et soient les opérations:

- **Addition**: $X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- **Multiplication par un scalaire**: $\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^n$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

## Définition[Vecteur et coordonnées]

Tout élément $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé **vecteur** et chaque $x_i$ est appelé **coordonnée** de $X$.

## Définition[Vecteur et coordonnées]

Tout élément $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé **vecteur** et chaque $x_i$ est appelé **coordonnée** de $X$.

## Définition[Vecteur nul]

On appelle **vecteur nul**, noté $0$, le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à $0$.

## Définition[Base et dimension de $\mathbb{R}^n$]

Soit $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel. L'ensemble $\{E_i\}, 1 \leq i \leq n$ composé des vecteurs $E_i = (e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_n)$ avec $e_j = 1$ si $j = i$ et 0 sinon est appelé base canonique de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ peut alors être obtenu de façon unique par:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E_i$$

On appelle alors $n$ la dimension de $\mathbb{R}^n$.

## Définition[Produit scalaire]

Soit $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel et soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire** de $X$ et $Y$, noté $\boldsymbol{X \cdot Y}$, est défini par:

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

## Définition[Produit scalaire]

Soit $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel et soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire** de $X$ et $Y$, noté $\boldsymbol{X \cdot Y}$, est défini par:

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

## Propriétés[Produit scalaire]

Soient $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a:

- $X \cdot Y = Y \cdot X$
- $(\lambda X + \mu Y) \cdot Z = \lambda(X \cdot Z) + \mu(Y \cdot Z)$
- $X \cdot X \geq 0$ avec $X \cdot X = 0 \leftrightarrow X = 0$

## Définition[Norme d'un vecteur]

Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La **norme** de $X$, notée $\|X\|$ est définie par:

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}$$

## Définition[Norme d'un vecteur]

Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La **norme** de $X$, notée $\|X\|$ est définie par:

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

## Propriétés[Norme d'un vecteur]

Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|X\| \geq 0$ avec $\|X\| = 0 \leftrightarrow X = 0$
- $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
- $\|X\| = |X|$ si $n = 1$

## Définition[Fonction réelle à $n$ variables]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction $f: D_f \subseteq E \to G$ est appelée **fonction réelle à $n$ variables** si $E = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}$. Elle s'écrit alors:

$$\begin{aligned} f: \quad & D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(X) \end{aligned}$$

Les $n$ coordonnées $x_1, \dots, x_n$ du vecteur $X$ sont appelées **variables** de $f$.

## Définition[Fonction réelle à $n$ variables]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction $f: D_f \subseteq E \to G$ est appelée **fonction réelle à $n$ variables** si $E = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}$. Elle s'écrit alors:

$$f: \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(X)$$

Les $n$ coordonnées $x_1, \dots, x_n$ du vecteur $X$ sont appelées **variables** de $f$.

## Remarque[Fonction réelle à $n$ variables]

Une fonction à $n$ variables $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associe à **un** élément $X$ de $\mathbb{R}^n$ **un** élément $f(X)$ de $\mathbb{R}$.

## Exemple[Fonction réelle à $n$ variables]

$$z: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

## Exemple[Fonction réelle à $n$ variables]

$$z: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

$n$ variables: $x_1, \dots, x_n$

## Exemple[Fonction réelle à $n$ variables]

$$z: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

$n$ variables: $x_1, \dots, x_n$

$$z: \quad \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$
$$W = (w_1, \dots, w_n, b) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

$n + 1$ variables: $w_1, \dots, w_n, b$

## Exemple[Fonction réelle à $n$ variables]

$z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$

$n$ variables: $x_1, \dots, x_n$

$z$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$W = (w_1, \dots, w_n, b) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$

$n + 1$ variables: $w_1, \dots, w_n, b$

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b$$

Même écriture

## Exemple[Fonction réelle à $n$ variables]

$z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$

$n$ variables: $x_1, \dots, x_n$

$z$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$W = (w_1, \dots, w_n, b) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$

$n + 1$ variables: $w_1, \dots, w_n, b$

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b$$

Même écriture

**Attention**: Une même écriture de fonction peut avoir différentes variables selon le contexte. La détermination des variables **dépend du problème considéré**.

## Propriétés[Fonction réelle à $n$ variables]

Les notions de définition, ensemble de définition, image, antécédent et ensemble image restent inchangées.

## Propriétés[Fonction réelle à $n$ variables]

Les notions de définition, ensemble de définition, image, antécédent et ensemble image restent inchangées.

## Vocabulaire[Vecteur et point]

Dans le cadre des fonctions réelles à $n$ variables, un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être appelé:

- Vecteur pour désigner déplacement ou une direction
- **Points** Pour désigner une position ou une fonction est évaluée

## Propriétés[Fonction réelle à $n$ variables]

Les notions de définition, ensemble de définition, image, antécédent et ensemble image restent inchangées.

## Vocabulaire[Vecteur et point]

Dans le cadre des fonctions réelles à $n$ variables, un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être appelé:

- Vecteur pour désigner déplacement ou une direction
- **Points** Pour désigner une position ou une fonction est évaluée

Quelles sont les propriétés des fonctions à $n$ variables:

Limite ? Continuité ? Dérivée ? Extremum ?

## Définition[Adhérence dans $\mathbb{R}^n$]

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit **adhérent** à $E$ si:

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \exists X \in E \ \ \|X - X_0\| < \eta$$

L'ensemble des vecteurs adhérents à $E$, appelé **adhérence** de $E$, est noté $\overline{E}$.

$X_0$ est adhérent à $E$ s'il existe des vecteurs de $E$ arbitrairement proches de $X_0$ sans que celui-ci n'appartienne nécessairement à $E$.

## Définition[Limite de fonction à $n$ variables]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $X_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

- $f$ admet une **limite** finie en $X_0$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in D_f \ (0 < \|X - X_0\| < \delta \to |f(X) - l| < \varepsilon)$
- $f$ admet $-\infty$ pour **limite** en $X_0$ si:
  $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in D_f \ (0 < \|X - X_0\| < \delta \to f(X) < a)$
- $f$ admet $+\infty$ pour **limite** en $X_0$ si:
  $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in D_f \ (0 < \|X - X_0\| < \delta \to f(X) > a)$

On note alors $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$ la limite de $f$ en $X_0$.

## Définition[Limite de fonction à $n$ variables]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $X_0 \in \overline{D_f}$. On dit que:

- $f$ admet une **limite** finie en $X_0$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in D_f \ (0 < \|X - X_0\| < \delta \to |f(X) - l| < \varepsilon)$
- $f$ admet $-\infty$ pour **limite** en $X_0$ si:
  $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in D_f \ (0 < \|X - X_0\| < \delta \to f(X) < a)$
- $f$ admet $+\infty$ pour **limite** en $X_0$ si:
  $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in D_f \ (0 < \|X - X_0\| < \delta \to f(X) > a)$

On note alors $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$ la limite de $f$ en $X_0$.

Dans le cas à 1 variable, la norme $\|x\|$ est égale à la valeur absolue $|x|$

## Propriétés[Limite de fonction à $n$ variables]

Pour une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, au vu de la définition de la limite d'une fonction à $n$ variables, les propriétés suivantes **restent inchangées**:

- Unicité de la limite: même démonstration avec $\|X\|$ au lieu de $|x|$
- Continuité: $f$ est continue en $X_0 \in D_f$ si $\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$
- Propriétés opératoires: $\lim_{X \to X_0} (f(X) + g(X))$, $\lim_{X \to X_0} (f(X) \times g(X))$, $\lim_{X \to X_0} (f(X)/g(X))$

En revanche, les notions de limites latérales **n'ont plus de sens** pour $n \geq 2$.

Pour $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ un vecteur $X$ peut être approché par une infinité de directions

Peut-on dériver une fonction à $n$ variables ?

## Rappel[Dérivabilité / Dérivée]

Une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_a \in D_f$ si le taux d'accroissement en $x_a$ admet une limite finie. Plus formellement:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h} = f'(x_a) \in \mathbb{R}$$

On appelle alors dérivée de $f$ en $x_a$ la valeur $f'(x_a)$.

## Intuition[Dérivabilité / Dérivée de fonction à $n$ variables]

Pour qu'une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$ soit dérivable en $X_a \in D_f$ le taux d'accroissement en $X_a$ doit admettre une limite finie.

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(X_a + H) - f(X_a)}{H} = f'(X_a) \in \mathbb{R}$$

## Intuition[Dérivabilité / Dérivée de fonction à $n$ variables]

Pour qu'une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$ soit dérivable en $X_a \in D_f$ le taux d'accroissement en $X_a$ doit admettre une limite finie.

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(X_a + H) - f(X_a)}{\boldsymbol{H}} = f'(X_a) \in \mathbb{R}$$

**Problème**: La division par un vecteur n'existe pas.

Une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$ **n'est pas** dérivable au sens de la définition usuelle.

Quel concept peut se substituer ?

## Définition[Fonction Différentiable]

Une fonction réelle à $n$ variables $f$ est **différentiable** en $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ s'il existe $G = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$ et une fonction réelle à $n$ variables $\varepsilon$ telle que $\lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0$ qui vérifient:

$$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a), \text{ avec } H = X - X_a$$

Pour aller plus loin: https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

## Définition[Fonction Différentiable]

Une fonction réelle à $n$ variables $f$ est **différentiable** en $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ s'il existe $G = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$ et une fonction réelle à $n$ variables $\varepsilon$ telle que $\lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0$ qui vérifient:

$$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\| \varepsilon(H) + f(X_a), \text{ avec } H = X - X_a$$

Comment déterminer $G$ ? En « découpant » $f$

## Définition[Application partielle]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $X = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$ associe $f(X) \in \mathbb{R}$, soit $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$.

## Définition[Application partielle]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $X = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$ associe $f(X) \in \mathbb{R}$, soit $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$. L'**application partielle** de $f$ en $X_a$ selon la variable $x_i$ est une fonction notée $\boldsymbol{f_i^{X_a}}$ telle que:

$$\boldsymbol{f_i^{X_a}}: \boldsymbol{D_{f_i^{X_a}}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x_i} \mapsto \boldsymbol{f(X_{a|a_i \leftarrow x_i})}$$

Où

- $X_{a|a_i \leftarrow x_i}$ désigne le vecteur $X_a$ dans lequel $a_i$ a été remplacée par $x_i$
- $D_{f_i^{X_a}} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid X_{a|a \leftarrow x_i} \in D_f\}$

# Exemple[Application partielle]

$$z: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

# Exemple[Application partielle]

$$z: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

$$X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Choix d'un point

# Exemple[Application partielle]

$$z: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

$$X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$X_{a|_{a_i \leftarrow x_i}} = (a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$$

Remplacement de la composante $i$

# Exemple[Application partielle]

$z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$

$$X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$X_{a|a_i \leftarrow x_i} = (a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$$

$z_i^{X_a}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_i \mapsto w_1 a_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n a_n + b$

Application partielle de $z$ en $X_a$ selon $x_i$

Les $a_j$ $(j \neq i)$ sont des constantes

## Définition[Dérivée partielle]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $X = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$ associe $f(X) \in \mathbb{R}$, soit $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$. La **dérivée partielle** de $f$ par rapport à $x_i$ en $X_a$ est la dérivée en $a_i$, si elle existe, de l'application partielle de $f$ en $X_a$ selon la variable $x_i$. Plus formellement:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a) = \left(f_i^{X_a}\right)'(a_i) = \frac{df_i^{X_a}}{dx_i}(a_i)$$

## Définition[Dérivée partielle]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $X = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$ associe $f(X) \in \mathbb{R}$, soit $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$. La **dérivée partielle** de $f$ par rapport à $x_i$ en $X_a$ est la dérivée en $a_i$, si elle existe, de l'application partielle de $f$ en $X_a$ selon la variable $x_i$. Plus formellement:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a) = \left(f_i^{X_a}\right)'(a_i) = \frac{df_i^{X_a}}{dx_i}(a_i)$$

$\partial$: d rond / curly d (rounded d, partial)

# Exemple[Dérivée partielle]

Soit $z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n x_n + b$$

## Exemple[Dérivée partielle]

Soit $z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n x_n + b$$

et soit $X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$

## Exemple[Dérivée partielle]

Soit $z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n x_n + b$$

et soit $X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$

on a alors $z_i^{X_a}(X_a) = w_1 a_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n a_n + b$

Application partielle de $z$ en $X_a$ selon $x_i$

## Exemple[Dérivée partielle]

Soit $z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n x_n + b$$

et soit $X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$

on a alors $z_i^{X_a}(X_a) = w_1 a_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n a_n + b$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(X_a) = \left(z_i^{X_a}\right)'(a_i)$$

$$= \frac{df_i^{X_a}}{dx_i}(a_i)$$

Dérivée partielle de $z$ en $X_a$ selon $x_i$

# Exemple[Dérivée partielle]

Soit $z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n x_n + b$$

et soit $X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$

on a alors $z_i^{X_a}(X_a) = \underbrace{w_1 a_1 + \cdots}_{\text{Constantes}} + w_i x_i + \underbrace{\cdots + w_n a_n + b}_{\text{Constantes}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(X_a) = \left(z_i^{X_a}\right)'(a_i)$$

$$= \frac{df_i^{X_a}}{dx_i}(a_i)$$

# Exemple[Dérivée partielle]

Soit $z$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n x_n + b$$

et soit $X_a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$

on a alors $z_i^{X_a}(X_a) = w_1 a_1 + \cdots + w_i x_i + \cdots + w_n a_n + b$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(X_a) = \left(z_i^{X_a}\right)'(a_i) = \frac{dz_i^{X_a}}{dx_i}(a_i) = w_i$$

Dérivée partielle de $z$
en $X_a$ pour $x_i = a_i$

## Définition[Fonction dérivée partielle]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, tels que la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_i$ existe en tout point de $D_f$.

## Définition[Fonction dérivée partielle]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, tels que la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_i$ existe en tout point de $D_f$. On appelle **fonction dérivée partielle** de $f$ par rapport à $x_i$ la fonction:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \boldsymbol{D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$$

$$\boldsymbol{X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \frac{df_i^X}{dx_i}(x_i)}$$

## Définition[Fonction dérivée partielle]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, tels que la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_i$ existe en tout point de $D_f$. On appelle **fonction dérivée partielle** de $f$ par rapport à $x_i$ la fonction:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \boldsymbol{D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$$

$$\boldsymbol{X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \frac{df_i^X}{dx_i}(x_i)}$$

On appelle indistinctement dérivée partielle la valeur $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a)$ et la **fonction dérivée partielle**

## Définition[Fonction dérivée partielle]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, tels que la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_i$ existe en tout point de $D_f$. On appelle **fonction dérivée partielle** de $f$ par rapport à $x_i$ la fonction:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \boldsymbol{D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$$

$$\boldsymbol{X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \frac{df_i^X}{dx_i}(x_i)}$$

On appelle indistinctement dérivée partielle la valeur $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a)$ et la **fonction dérivée partielle**

**Attention:** Contrairement aux applications partielles, les fonctions dérivées partielles sont des fonctions à $n$ variables

## Application[Fonction dérivée partielle]

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on dérive l'expression de f par rapport à $x_i$ en considérant toutes les autres variables de $f$ comme des constantes.

## Application[Fonction dérivée partielle]

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on dérive l'expression de f par rapport à $x_i$ en considérant toutes les autres variables de $f$ comme des constantes.

## Exemple[Fonction dérivée partielle]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 0.5)^2 + 0.5x_1x_2$$

## Application[Fonction dérivée partielle]

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on dérive l'expression de f par rapport à $x_i$ en considérant toutes les autres variables de $f$ comme des constantes.

## Exemple[Fonction dérivée partielle]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 0.5)^2 + 0.5x_1x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1) + 0.5x_2$$

## Application[Fonction dérivée partielle]

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on dérive l'expression de f par rapport à $x_i$ en considérant toutes les autres variables de $f$ comme des constantes.

## Exemple[Fonction dérivée partielle]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 0.5)^2 + 0.5x_1x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1) + 0.5x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4(x_2 + 0.5) + 0.5x_1$$

## Proposition[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, l'application partielle $f_i^{X_a}$ est dérivable en $a_i$ et $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a)$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$f(X_a + hE_i) = hE_i \cdot G + \|hE_i\|\varepsilon(hE_i) + f(X_a)$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$f(X_a + hE_i) = hE_i \cdot G + \|hE_i\|\varepsilon(hE_i) + f(X_a)$

$f(X_a + hE_i) = hg_i$ ...

$$hE_i \cdot G = h\big((0, \dots, 1, \dots, 0) \cdot (g_1, \dots, g_i, \dots, g_n)\big)$$
$$= h(0 \times g_1 + \cdots + 1 \times g_i + \cdots + 0 \times g_n) = hg_i$$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$f(X_a + hE_i) = hE_i \cdot G + \|hE_i\|\varepsilon(hE_i) + f(X_a)$

$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i)$ …

$$hE_i = h(0, \dots, 1, \dots, 0) = (0, \dots, h, \dots, 0)$$
$$\|hE_i\| = \|(0, \dots, h, \dots, 0)\| = \sqrt{h^2} = |h|$$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$f(X_a + hE_i) = hE_i \cdot G + \|hE_i\|\varepsilon(hE_i) + f(X_a)$

$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f(X_a)$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$f(X_a + hE_i) = hE_i \cdot G + \|hE_i\|\varepsilon(hE_i) + f(X_a)$

$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f(X_a)$

$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$

$$f(X_a) = f\left(X_{a|a_i \leftarrow a_i}\right) = f_i^{X_a}(a_i)$$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$$

$$f_i^{X_a}(a_i + h) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$$

$$\begin{aligned} f(X_a + hE_i) &= f\big((a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + (0, \dots, h, \dots, 0)\big) \\ &= f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) = f\left(X_{a_{|a_i \leftarrow a_i + h}}\right) = f_i^{X_a}(a_i + h) \end{aligned}$$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$$

$$f_i^{X_a}(a_i + h) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$$

$$f_i^{X_a}(a_i + h) - f_i^{X_a}(a_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i)$$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$f(X_a + hE_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$$

$$f_i^{X_a}(a_i + h) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i) + f_i^{X_a}(a_i)$$

$$f_i^{X_a}(a_i + h) - f_i^{X_a}(a_i) = hg_i + |h|\varepsilon(hE_i)$$

$$\frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

Division par $h \neq 0$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = \lim_{h\to 0} g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = \lim_{h\to 0} g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = \lim_{h\to 0} g_i$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h} = 0$$

car $\left|\frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}\right| = |\varepsilon(hE_i)| = |\varepsilon(H)|$

et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(H) = 0$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = \lim_{h\to 0} g_i + \frac{|h|\varepsilon(hE_i)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i^{X_a}(a_i+h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = \lim_{h\to 0} g_i = g_i$$

$g_i$ ne dépend pas de $h$

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i^{X_a}(a_i + h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = g_i$$

$g_i$ existe et est fini

$f_i^{X_a}$ est une fonction réelle

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i^{Xa}(a_i + h) - f_i^{Xa}(a_i)}{h} = g_i$$

$$\frac{df_i^{Xa}}{dxi}(a_i) = g_i$$

Définition de la dérivée

## Démonstration[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Si $f$ est différentiable alors il existe $G = (g_1, \dots, g_n)$ tel que:

$f(X_a + H) = H \cdot G + \|H\|\varepsilon(H) + f(X_a)$, avec $H = X - X_a$

Soit $H = hE_i$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ un vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i^{X_a}(a_i + h) - f_i^{X_a}(a_i)}{h} = g_i$$

$$\frac{df_i^{X_a}}{dx_i}(a_i) = g_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a) = g_i$$

Définition de la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a) = \frac{df_i^{X_a}}{dx_i}(a_i)$$

## Théorème[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, l'application partielle $f_i^{X_a}$ est dérivable en $a_i$ et $\boldsymbol{g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a)}$

**Attention:** La réciproque du théorème n'est pas vraie. Une fonction à $n$ variables peut admettre ses $n$ dérivées partielles en $X_a$ mais ne pas y être différentiable.

## Théorème[Fonction Différentiable et dérivées partielles]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$ avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, l'application partielle $f_i^{X_a}$ est dérivable en $a_i$ et $\boldsymbol{g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_a)}$

**Attention:** La réciproque du théorème n'est pas vraie. Une fonction à $n$ variables peut admettre ses $n$ dérivées partielles en $X_a$ mais ne pas y être différentiable.

Existe-t-il des cas où cette réciproque est vraie ?

**Théorème[Condition suffisante de différentiabilité]**

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$. Si les $n$ fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existent au voisinage de $X_a$ et sont continues en $X_a$ alors $f$ est différentiable en $X_a$.

[Voir Preuve]

## Théorème[Condition suffisante de différentiabilité]

Soit une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $X_a = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$. Si les $n$ fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existent au voisinage de $X_a$ et sont continues en $X_a$ alors $f$ est différentiable en $X_a$.

[Voir Preuve]

## Extension[Fonction de classe $\mathcal{C}^1$]

Si les $n$ fonctions dérivées partielles existent et sont continues sur $D_f$ alors $f$ est différentiable en tout point de $D_f$. On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D_f$.

## Détermination[Fonction différentiable]

Comment savoir si une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $D_f$ ?

## Détermination[Fonction différentiable]

Comment savoir si une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $D_f$ ?

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$

# Détermination[Fonction différentiable]

Comment savoir si une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $D_f$ ?

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$

Une $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'existe pas

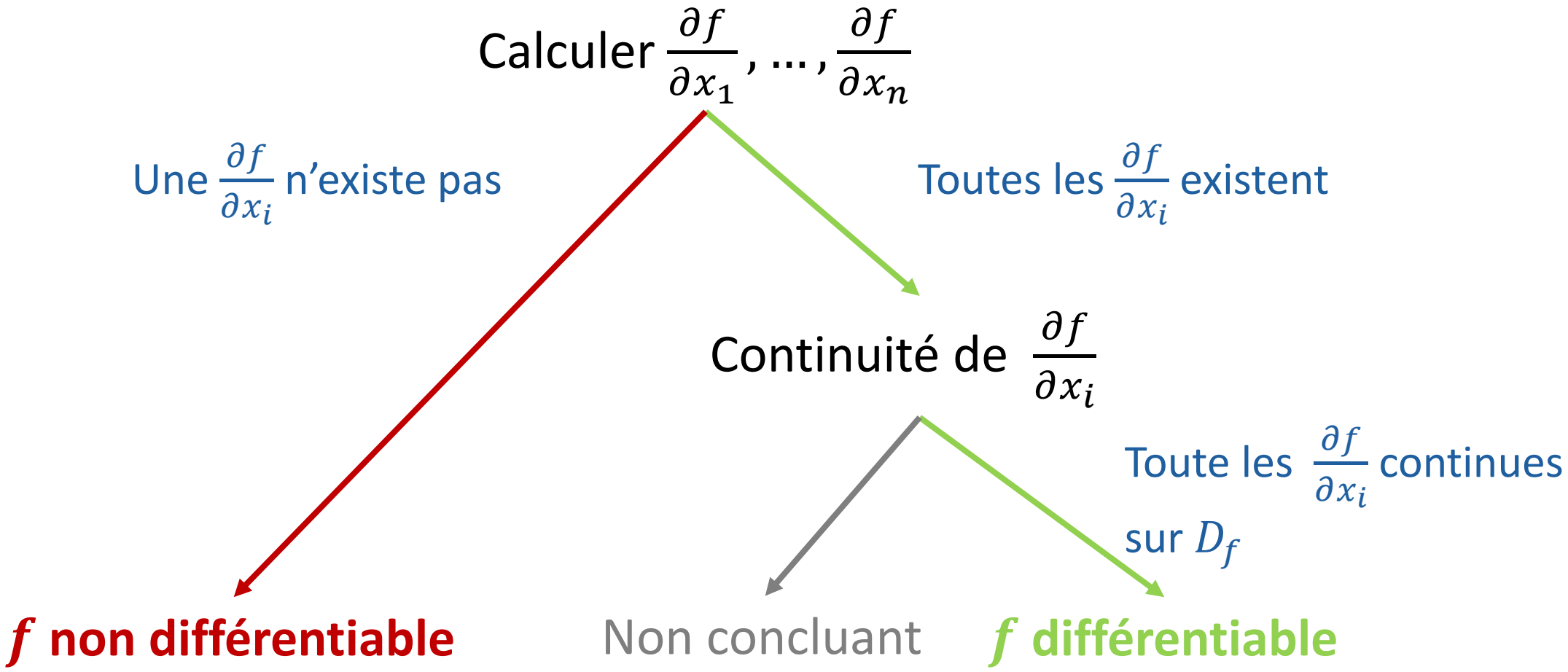
Toutes les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent

Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

**$f$ non différentiable**

# Détermination[Fonction différentiable]

Comment savoir si une fonction $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $D_f$ ?



## Définition[Gradient]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_a \in D_f$ tel que les $n$ dérivées partielles de $f$ existent en $X_a$. On appelle **gradient** de $f$ en $X_a$, noté $\boldsymbol{\nabla f(X_a)}$, le vecteur dont les composantes sont les $n$ dérivées partielles de $f$:

$$\boldsymbol{\nabla f(X_a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_a) \right) \in \mathbb{R}^n}$$

## Définition[Gradient]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $X_a \in D_f$ tel que les $n$ dérivées partielles de $f$ existent en $X_a$. On appelle **gradient** de $f$ en $X_a$, noté $\nabla f(X_a)$, le vecteur dont les composantes sont les $n$ dérivées partielles de $f$:

$$\nabla f(X_a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_a) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Nabla (del)

## Définition[Gradient]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $X_a \in D_f$ tel que les $n$ dérivées partielles de $f$ existent en $X_a$. On appelle **gradient** de $f$ en $X_a$, noté $\boldsymbol{\nabla f(X_a)}$, le vecteur dont les composantes sont les $n$ dérivées partielles de $f$:

$$\boldsymbol{\nabla f(X_a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_a) \right) \in \mathbb{R}^n}$$

## Propriété[Gradient]

Si $f$ est différentiable en $X_a$, alors $G = \nabla f(X_a)$ et on a:

$$f(X_a + H) = H \cdot \nabla f(X_a) + \|H\| \varepsilon(H) + f(X_a)$$

## Définition[Fonction Gradient]

Soit $f$ une fonction réelle à $n$ variables. Si les $n$ dérivées partielles de $f$ existent en tout point de $D_f$, on appelle **fonction gradient**, notée $\nabla f$, la fonction définie par:

$$\nabla f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right)$$

## Définition[Fonction Gradient]

Soit $f$ une fonction réelle à $n$ variables. Si les $n$ dérivées partielles de $f$ existent en tout point de $D_f$, on appelle **fonction gradient**, notée $\nabla f$, la fonction définie par:

$$\nabla f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right)$$

La fonction gradient a son image dans $\mathbb{R}^n$

## Exemple[Gradient]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 0.5)^2 + 0.5x_1x_2$$

## Exemple[Gradient]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 0.5)^2 + 0.5x_1x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1) + 0.5x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4(x_2 + 0.5) + 0.5x_1$$

## Exemple[Gradient]

Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 0.5)^2 + 0.5x_1x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1) + 0.5x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4(x_2 + 0.5) + 0.5x_1$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)$$

$$= (2(x_1 - 1) + 0.5x_2, 4(x_2 + 0.5) + 0.5x_1)$$

## Exemple[Gradient]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 + 0.5)^2 + 0.5x_1x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1) + 0.5x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4(x_2 + 0.5) + 0.5x_1$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)$$

$$= (2(x_1 - 1) + 0.5x_2, 4(x_2 + 0.5) + 0.5x_1)$$

Intérêt du gradient ?

Se comporte comme une dérivée

Comment trouver le minimum d'une fonction à $n$ variables ?

## Définition[Point intérieur]

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un point $V \in E$ est **intérieur** à $E$ si:

$$\exists \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_+^* \ \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n \ \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{V}\| < \boldsymbol{r} \ \rightarrow \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{E}$$

$V$ est intérieur à $E$ si tous les vecteurs suffisamment proches de $V$ appartiennent encore à $E$

## Définition[Point intérieur]

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un point $V \in E$ est **intérieur** à $E$ si:

$$\exists \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_+^* \ \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n \ \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{V}\| < \boldsymbol{r} \ \rightarrow \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{E}$$

En particulier, tout point de $\mathbb{R}^n$ est **intérieur** à $\mathbb{R}^n$.

$V$ est intérieur à $E$ si tous les vecteurs suffisamment proches de $V$ appartiennent encore à $E$

## Définition[Point intérieur]

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un point $V \in E$ est **intérieur** à $E$ si:

$$\exists \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_+^* \ \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n \ \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{V}\| < \boldsymbol{r} \ \rightarrow \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{E}$$

En particulier, tout point de $\mathbb{R}^n$ est **intérieur** à $\mathbb{R}^n$.

## Définition[Ensemble ouvert]

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si et seulement si tous ses points sont intérieurs.

## Définition[Point intérieur]

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un point $V \in E$ est **intérieur** à $E$ si:

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in \mathbb{R}^n \ \|X - V\| < r \rightarrow X \in E$$

En particulier, tout point de $\mathbb{R}^n$ est **intérieur** à $\mathbb{R}^n$.

## Définition[Ensemble ouvert]

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si et seulement si tous ses points sont intérieurs.

## Définition[Ensemble convexe]

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est **convexe** si et seulement si:

$$\forall X, Y \in E \ \forall \lambda \in [0,1] \ \lambda X + (1 - \lambda Y) \in E$$

# Analogie de notions

| Dimension 1 | | Dimension $n$ |
|---|---|---|
| Intervalle | ⟺ | Ensemble convexe |
| Intervalle ouvert | ⟺ | Ouvert convexe |
| Dérivée | ⟺ | Gradient |
| **Minimum** | ⟺ | ? |

**Théorème[Points stationnaires en dimension $n$ (Fermat)]**

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f$ admet un extremum local en un point intérieur $X_a$ où ses dérivées partielles existent alors:

$$\nabla f(X_a) = 0$$

[Voir Preuve]

## Théorème[Points stationnaires en dimension $n$ (Fermat)]

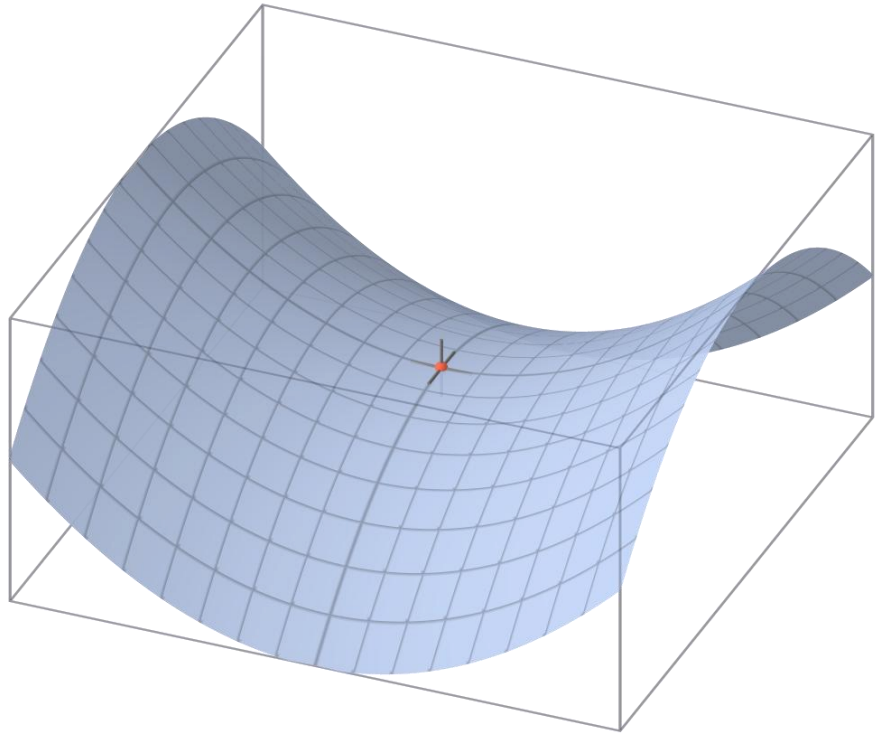
Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $f$ admet un extremum local en un point intérieur $X_a$ où ses dérivées partielles existent alors:

$$\nabla f(X_a) = 0$$

[Voir Preuve]

**Attention:** La réciproque n'est pas vraie (exemple de point selle).

Dans le cas général les $X$ tels que $\nabla f(X) = 0$ ne sont que des candidats aux extrema.



Est-ce qu'une famille de fonctions permet la réciproque ?

## Définition[Fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D_f$ convexe. La fonction $f$ est **convexe** si:

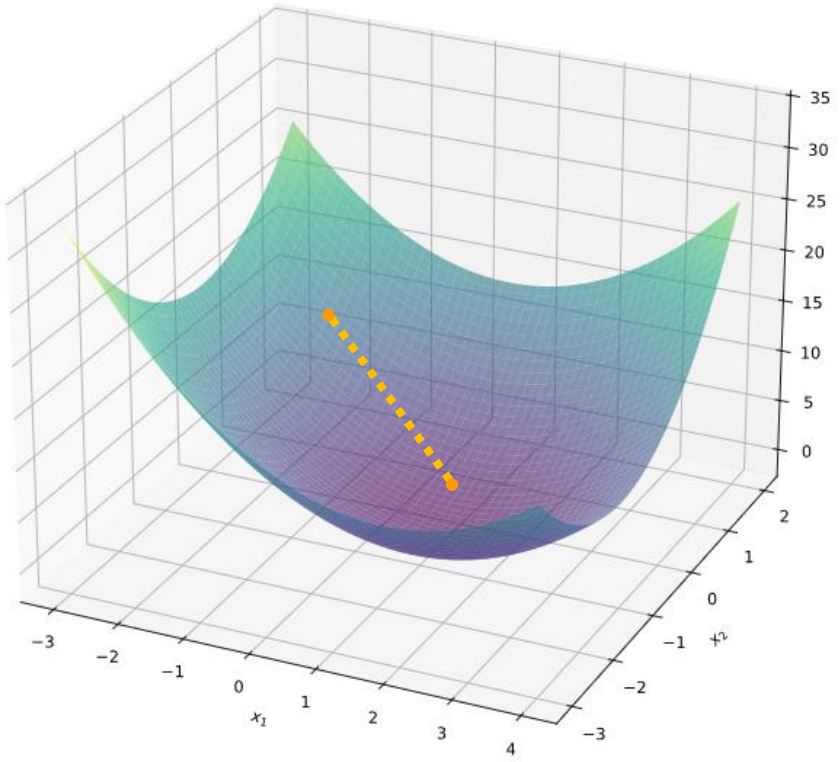
$$\forall X, Y \in D_f \ \forall \lambda \in [0,1] \ f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

[Voir Preuve]

## Définition[Fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D_f$ convexe. La fonction $f$ est **convexe** si:

$$\forall X, Y \in D_f \ \forall \lambda \in [0,1] \ f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$




Tout segment entre deux points sur le graphe de la fonction passe au-dessus de celui-ci

## Théorème[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable sur un ouvert $D_f$.
Le point $X_e \in D_f$ est un minimum global de $f$ si et seulement si:

$$\nabla f(X_e) = 0.$$

[Voir Preuve]

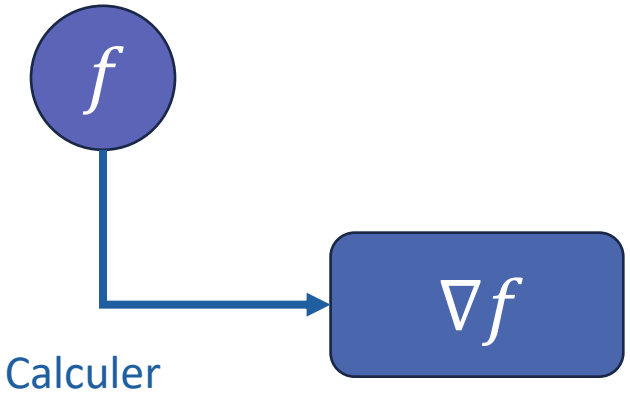
# Méthode[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



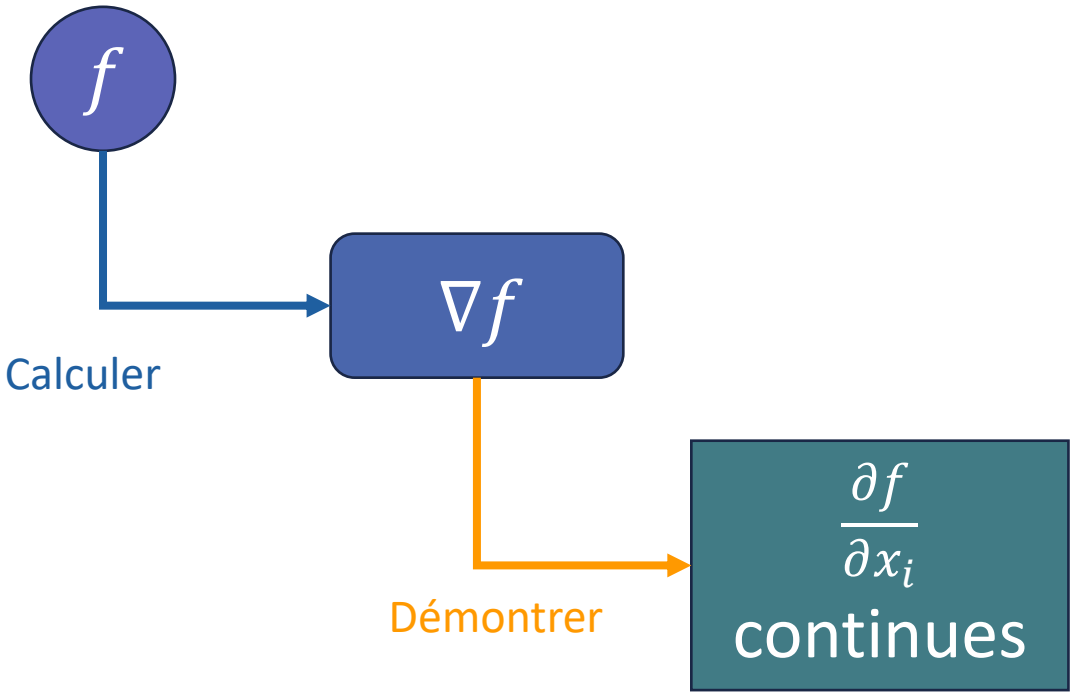
# Méthode[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



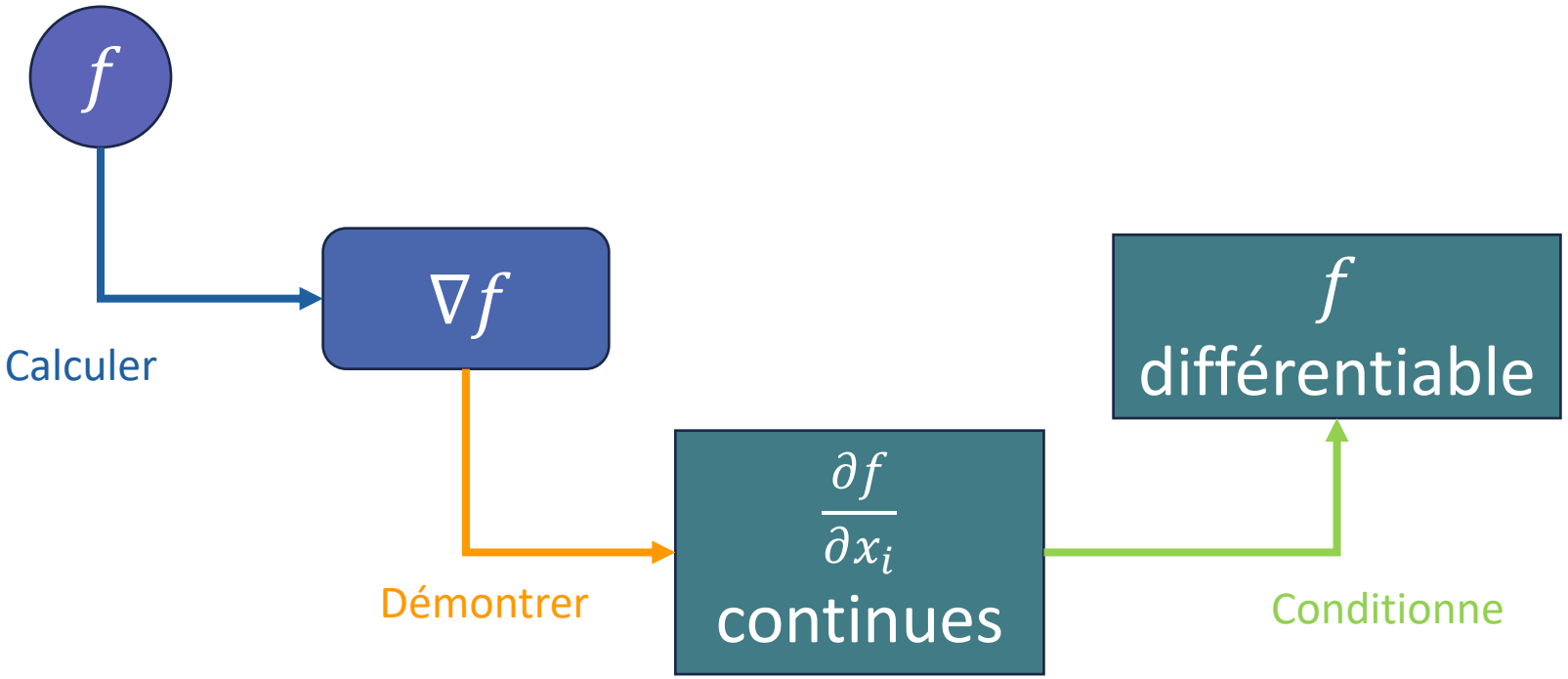
# Méthode[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



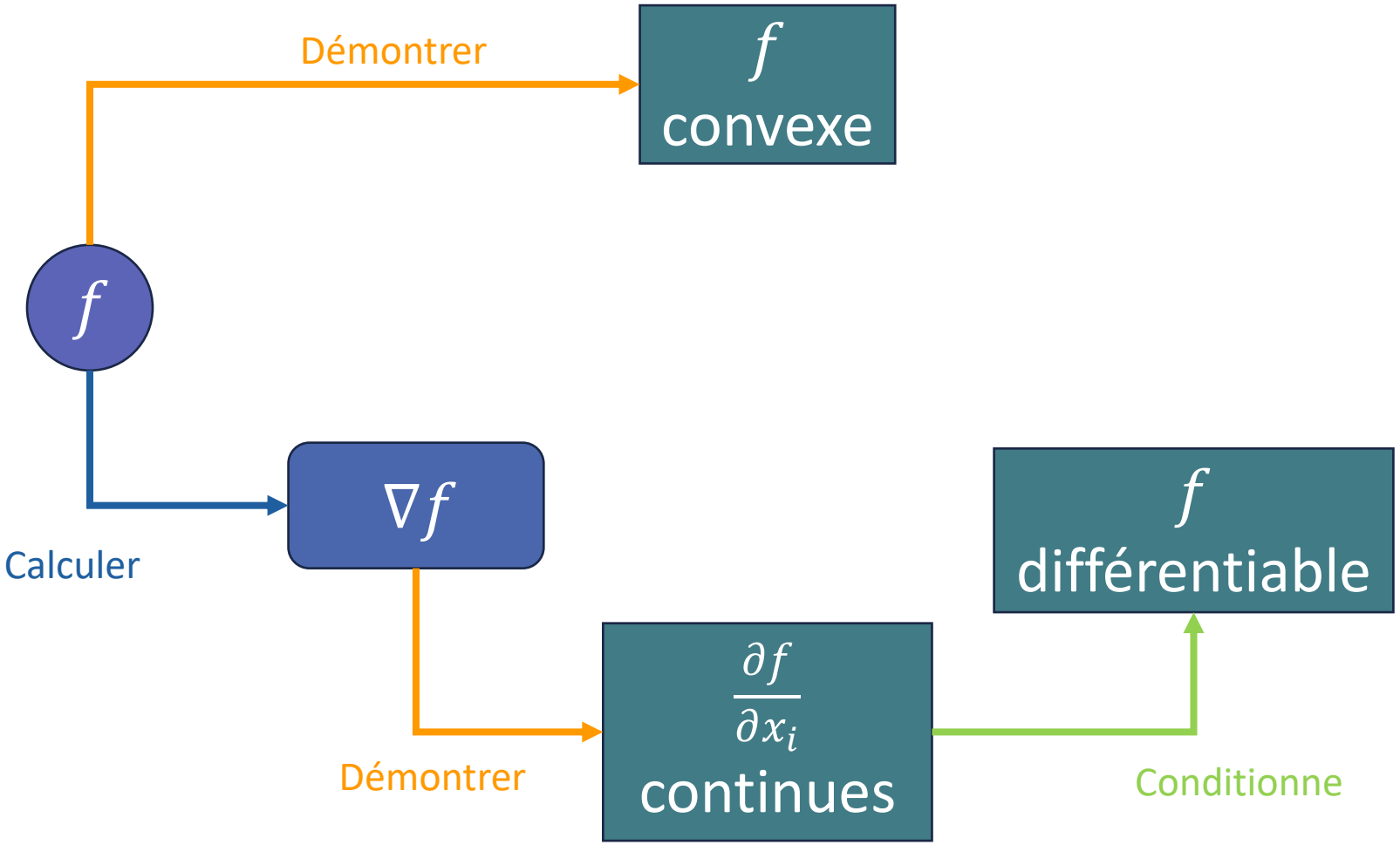
# Méthode[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



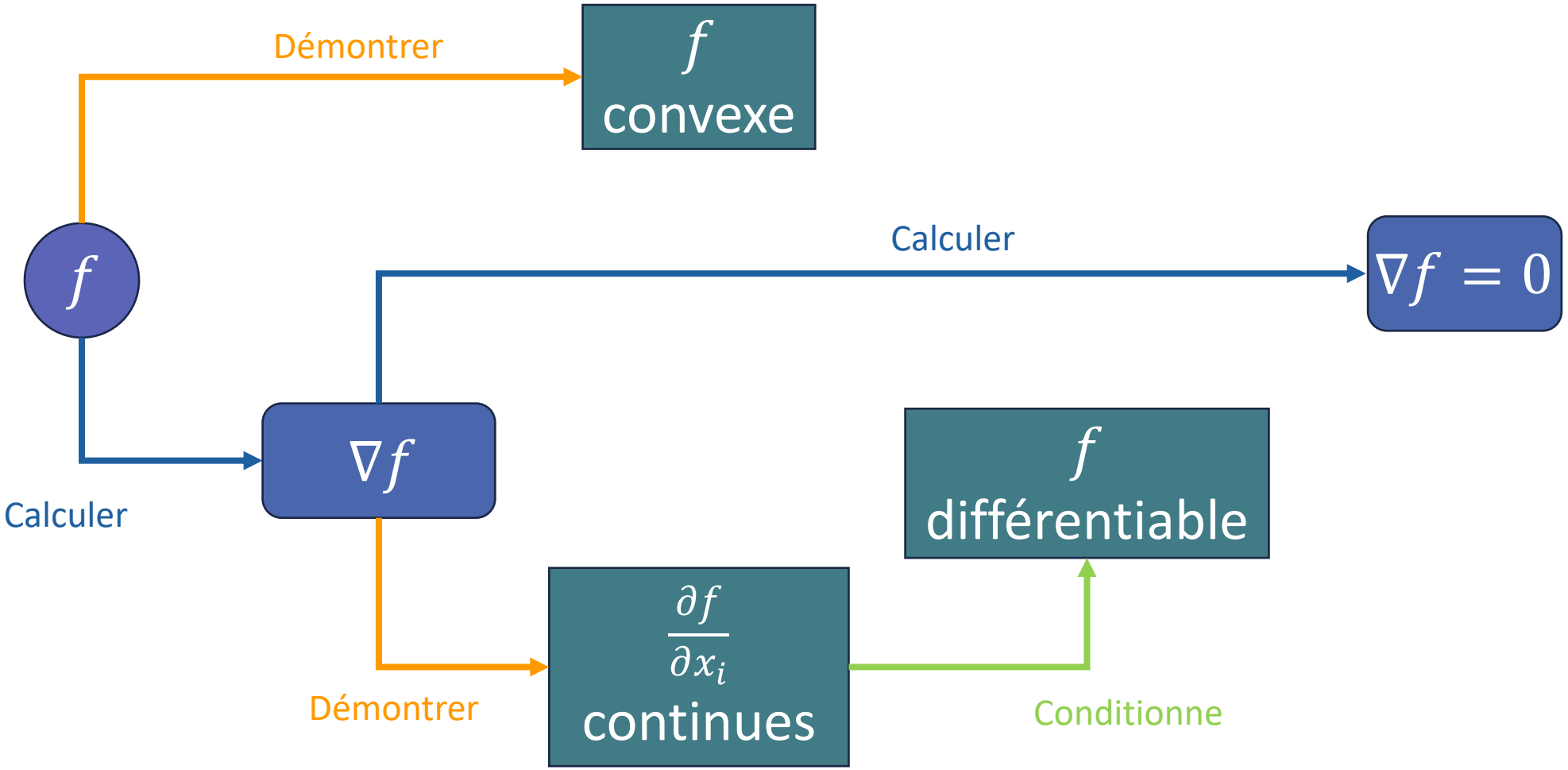
# Méthode[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



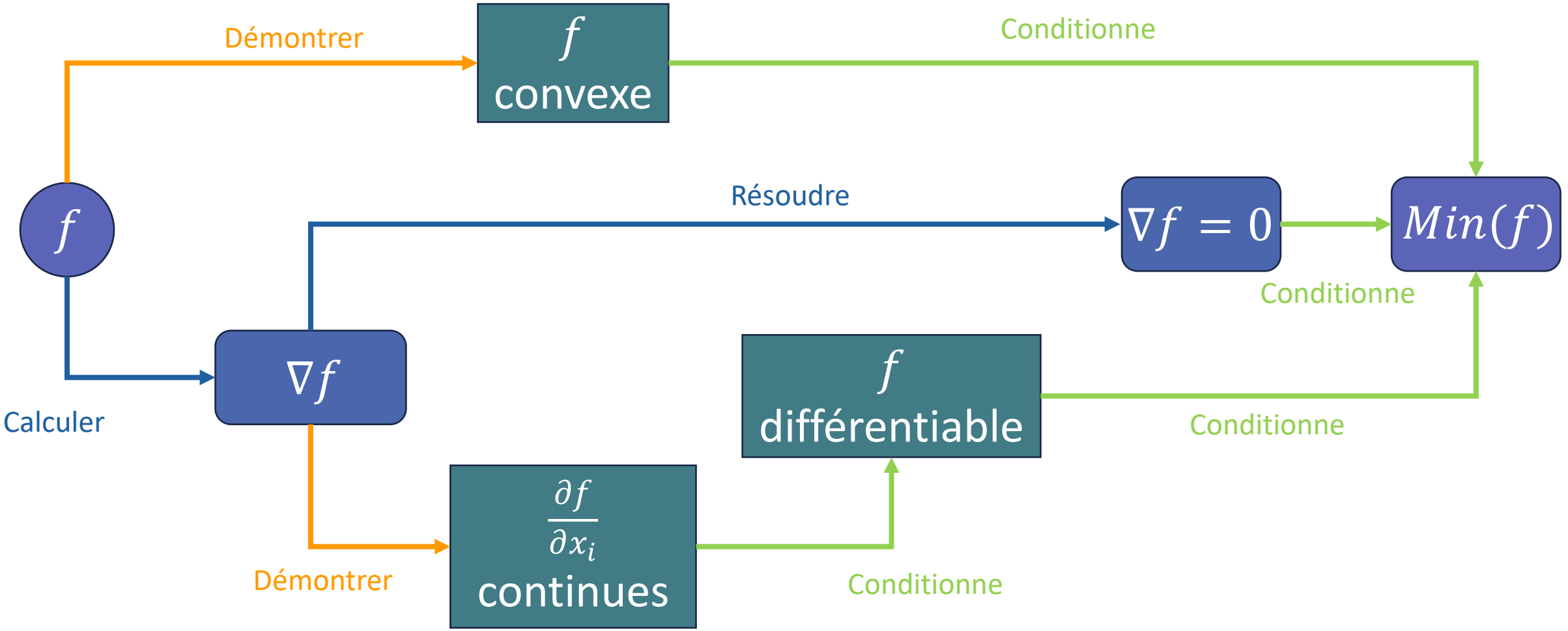
# Méthode[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

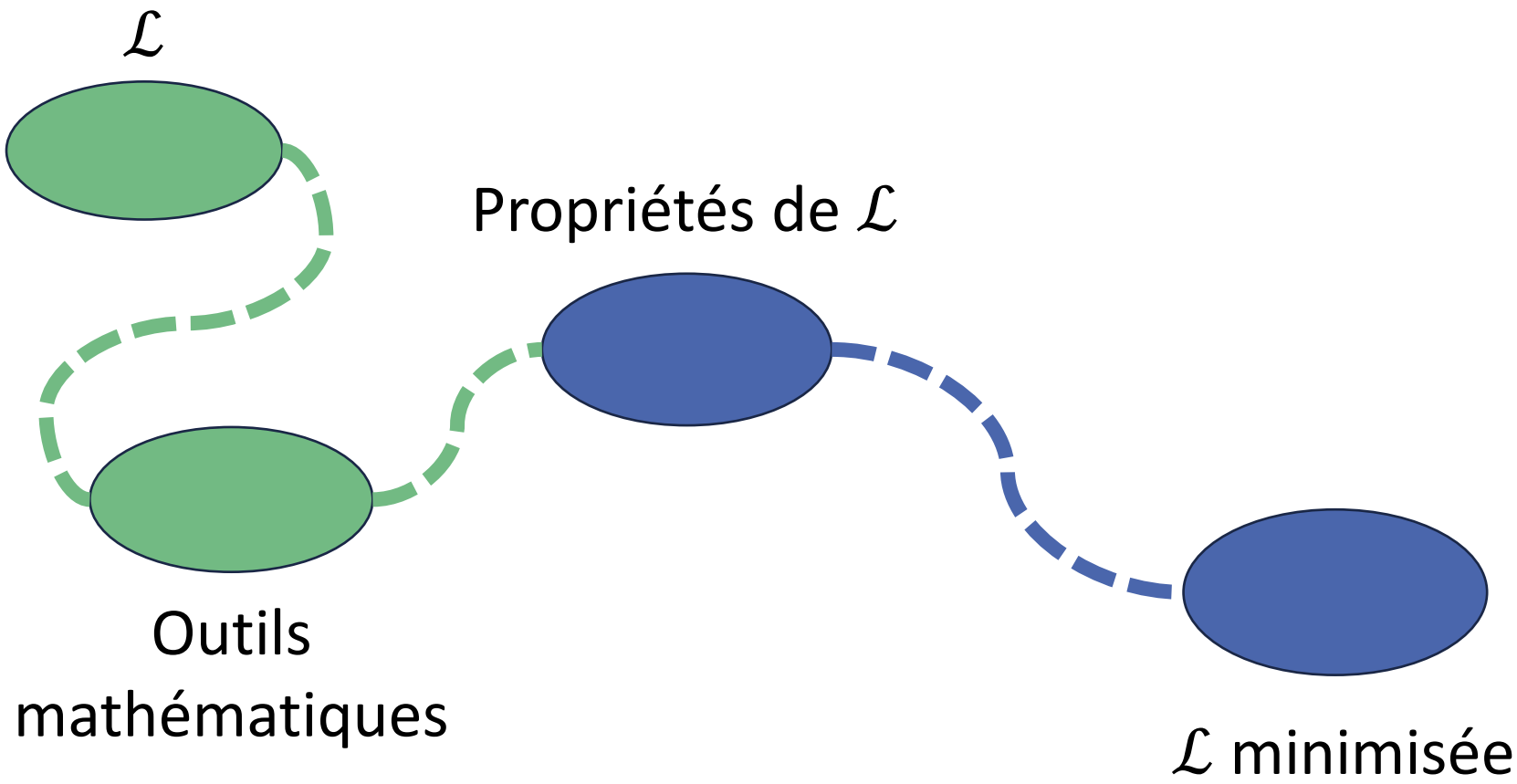


# Méthode[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

Soit $f$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



# Cheminement



# Propriétés de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

Facteur de normalisation: Constante

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Valeurs cibles: Constantes

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Nombres: Constantes

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Nombre d'exemples constant

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

log: Fonction fixe

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$ ← Fonction d'activation

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$

Nombres: Constantes

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$

Fonction $e$: fixe

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$

$$z^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

Fonction d'agrégation

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$

$$z^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

Vecteurs de caractéristiques ne dépendent pas du modèle

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$

$$z^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

Somme identique pour tout $z^{(k)}$

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$

$$z^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

Paramètres du modèle

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi^{(k)}\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi^{(k)}\right)$$

Qu'est-ce qui fait varier $\mathcal{L}$ ?

$$\varphi^{(k)} = \varphi\left(z^{(k)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}}$$

$$z^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

Les paramètres du modèle

$\boldsymbol{\mathcal{W}} \cup \{\boldsymbol{b}\}$,

$\mathcal{W} = \{w_i\}, 1 \leq i \leq n$

# Variables de la fonction de coût

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)$$

$$\varphi\left(z^{(k)}(W)\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}} \qquad z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

# Propriétés de la fonction de coût

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)$$

$$\varphi\left(z^{(k)}(W)\right) = \frac{1}{1 + e^{-z^{(k)}}} \qquad z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

Composition ?

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t^{(k)} \log\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} -\left(t^{(k)} \log\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)\right)$$

Le signe – est distribué

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} -\left(t^{(k)} \log\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)\right)$$

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \underbrace{-\left(t^{(k)} \log\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log\left(1 - \varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)\right)}$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1 - x)\right)$$

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)}\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)}\log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right)\log(1-x)\right)$$

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)}\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)}\log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right)\log(1-x)\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

La composition apparait naturellement

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)}\left(\varphi\left(z^{(k)}(W)\right)\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)}\log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right)\log(1-x)\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

$\mathcal{L}$ est la moyenne de fonctions composées

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1-x)\right)$$

Domaine de définition ? Ensemble Image ?

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1 - x)\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

$D_{Z^{(k)}} = \mathbb{R}^{n+1}$ $Im(z^{(k)}) = \mathbb{R}$

Produit scalaire

# Composition de la fonction de coût

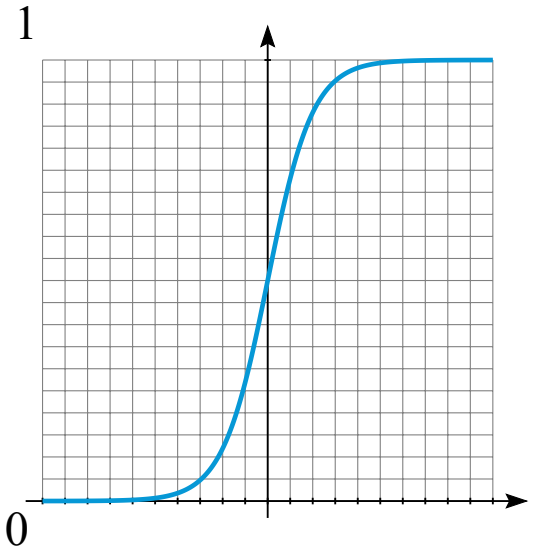
$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1 - x)\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$




$D_\varphi = \mathbb{R}$ $\quad Im(\varphi) = ]0,1[$

$\circ$

$D_{Z^{(k)}} = \mathbb{R}^{n+1}$ $\quad Im(z^{(k)}) = \mathbb{R}$

Définition de la sigmoïde

# Composition de la fonction de coût

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1-x)\right)$$

$$D_{\ell^{(k)}} = ]0,1[$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$D_{\varphi} = \mathbb{R} \qquad Im(\varphi) = ]0,1[$$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

$$D_{Z^{(k)}} = \mathbb{R}^{n+1} \qquad Im(z^{(k)}) = \mathbb{R}$$

# Composition de la fonction de coût

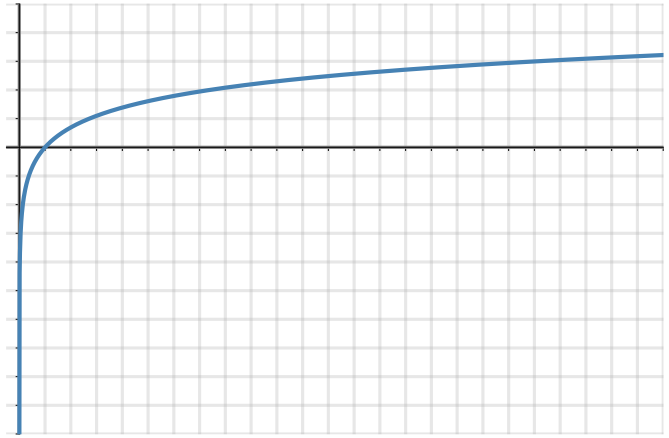
$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

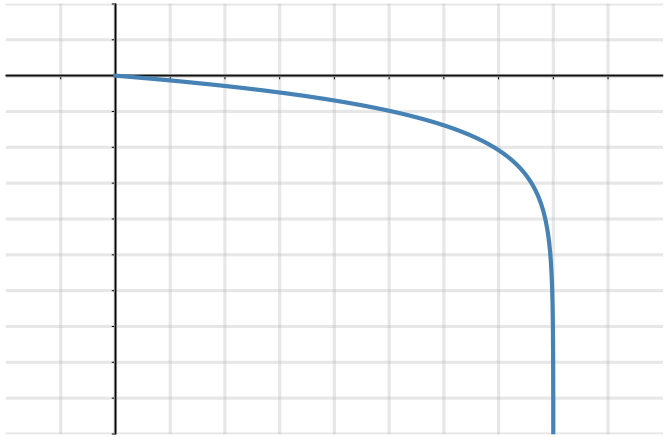
$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1 - x)\right)$$

$$D_{\ell^{(k)}} = ]0,1[$$

$Im(\log(x)) = ]-\infty, 0[$



$Im(\log(1 - x)) = ]-\infty, 0[$



# Composition de la fonction de coût

$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1 - x)\right)$$

$$D_{\ell^{(k)}} = ]0,1[$$

$$Im(\log(x)) = ]-\infty, 0[ \qquad Im(\log(1 - x)) = ]-\infty, 0[$$

$$Im(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right)\log(1 - x)) = ]-\infty, 0[$$

Exclusion mutuelle

# Composition de la fonction de coût

$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to E$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1 - x)\right)$$

$D_{\ell^{(k)}} = ]0,1[$ $Im(\ell^{(k)}) = ]0, +\infty[$

$Im(\log(x)) = ]-\infty, 0[$ $Im(\log(1 - x)) = ]-\infty, 0[$

$Im(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right)\log(1 - x)) = ]-\infty, 0[$

Attention au $-$

# Composition de la fonction de coût

$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to ]0, +\infty[$

$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1 - x)\right)$$

$D_{\ell^{(k)}} = ]0,1[$ $Im(\ell^{(k)}) = ]0, +\infty[$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$D_{\varphi} = \mathbb{R}$ $Im(\varphi) = ]0,1[$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

$D_{Z^{(k)}} = \mathbb{R}^{n+1}$ $Im(z^{(k)}) = \mathbb{R}$

# Composition de la fonction de coût

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to ]0, +\infty[$$

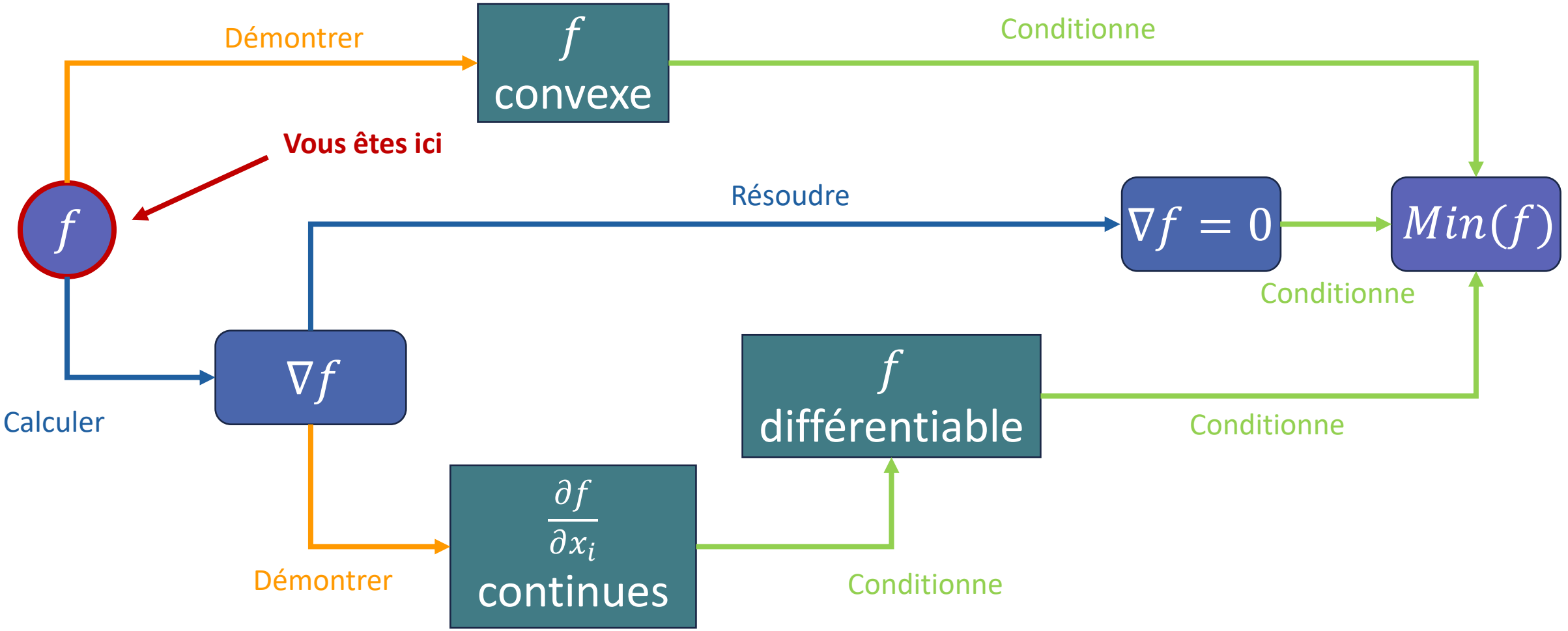
$$W \mapsto \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ell^{(k)} \circ \varphi \circ z^{(k)}(W)$$

$$z^{(k)}(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + b$$

$$\ell^{(k)}(x) = -\left(t^{(k)} \log(x) + \left(1 - t^{(k)}\right) \log(1-x)\right)$$

Minimisation ?

# Rappel


Démontrer
$f$ convexe
Conditionne
Vous êtes ici
$f$
Résoudre
$\nabla f = 0$
$Min(f)$
Conditionne
$\nabla f$
Calculer
$f$ différentiable
Conditionne
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continues
Démontrer
Conditionne

# ANNEXE : Preuves & Démonstrations



## Démonstration[Unicité de la limite]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l_1, l_2, l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

## Démonstration[Unicité de la limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l_1, l_2, l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

| Cas | $l_1$ | $l_2$ |
|---|---|---|
| 1 | $\in \mathbb{R}$ | $\in \mathbb{R}$ |
| 2 | $\in \mathbb{R}$ | $\pm\infty$ |
| 3 | $-\infty$ | $+\infty$ |

3 cas possibles

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon)$$

Définition des limites

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon)$$

Doit être vrai pour $\varepsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \in \mathbb{R}^{*+}$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \\ |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \end{cases}$$

Les deux assertions sont vraies pour $\delta_m$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \\ |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \end{cases} \quad |a - b| = |b - a|$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} |l_1 - f(x)| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \\ |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \end{cases} \quad |a - b| = |b - a|$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} |l_1 - f(x)| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \\ |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \end{cases}$$

$|a|$ $|c|$

$|b|$ $|c|$

Si $|a| < c$
et $|b| < c$
alors
$|a + b| < 2c$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} |l_1 - f(x)| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \\ |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2| \end{cases}$$

Si $|a| < c$
et $|b| < c$
alors
$|a + b| < 2c$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| < \frac{2}{3}|l_1 - l_2|$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| < \frac{2}{3}|l_1 - l_2|$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow |l_1 \underbrace{- f(x) + f(x)}_{= 0} - l_2| < \frac{2}{3}|l_1 - l_2|$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow |l_1 - l_2| < \frac{2}{3}|l_1 - l_2|$$

Toujours vrai car $x_0 \in \overline{D_f}$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 1.** Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}, l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{1}{3}|l_1 - l_2|\right)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow |l_1 - l_2| < \frac{2}{3}|l_1 - l_2|$$

Contradiction

## Démonstration[Unicité de la limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l_1, l_2, l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

| Cas | $l_1$ | $l_2$ |
|---|---|---|
| 1 | $\in \mathbb{R}$ | $\in \mathbb{R}$ |
| 2 | $\in \mathbb{R}$ | $\pm\infty$ |
| 3 | $-\infty$ | $+\infty$ |

Impossible

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon)$$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > A)$$

Définition des limites

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon)$$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > A)$$

Doit être vrai pour $\varepsilon = 1$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < 1)$$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > A)$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < 1)$$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > A)$$

Doit être vrai pour $A = l_1 + 1$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < 1)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$$

Doit être vrai pour $A = l_1 + 1$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l_1| < 1)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$$

$$|f(x) - l_1| < 1 \ \rightarrow f(x) < l_1 + 1$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < l_1 + 1)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$$

$$|f(x) - l_1| < 1 \ \rightarrow f(x) < l_1 + 1$$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < l_1 + 1)$

$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < l_1 + 1)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < l_1 + 1 \\ f(x) > l_1 + 1 \end{cases}$$

Les deux assertions sont vraies pour $\delta_m$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < l_1 + 1)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < l_1 + 1 \\ f(x) > l_1 + 1 \end{cases}$$

Toujours vrai car $x_0 \in \overline{D_f}$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < l_1 + 1)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < l_1 + 1 \\ f(x) > l_1 + 1 \end{cases}$$

Contradiction

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 2.** Soit $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < l_1 + 1)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > l_1 + 1)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < l_1 + 1 \\ f(x) > l_1 + 1 \end{cases}$$

Contradiction

La variation avec $l_2 = -\infty$ se contredit de la même façon

## Démonstration[Unicité de la limite]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l_1, l_2, l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

| Cas | $l_1$ | $l_2$ |
|---|---|---|
| 1 | $\in \mathbb{R}$ | $\in \mathbb{R}$ |
| 2 | $\in \mathbb{R}$ | $\pm\infty$ |
| 3 | $-\infty$ | $+\infty$ |

Impossible

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^*\ \forall x \in D_f\ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < A)$$

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^*\ \forall x \in D_f\ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > A)$$

Définition des limites

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^*\ \forall x \in D_f\ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < A)$$

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^*\ \forall x \in D_f\ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > A)$$

Doit être vrai pour $A = 0$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < 0)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > 0)$$

Doit être vrai pour $A = 0$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < 0)$

$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > 0)$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < 0)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > 0)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Les deux assertions sont vraies pour $\delta_m$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < 0)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > 0)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Toujours vrai car $x_0 \in \overline{D_f}$

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < 0)$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > 0)$$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall x \in D_f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Contradiction

## Démonstration[Unicité de la limite]

**Cas 3.** Soit $l_1 = -\infty, l_2 = +\infty$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_1 \rightarrow f(x) < 0)$

$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in D_f \ (0 < |x - x_0| < \delta_2 \rightarrow f(x) > 0)$

Soit $\delta_m = min(\delta_1, \delta_2)$

$\forall x \in D_f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_m \rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Contradiction

La variation avec $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$ se contredit de la même façon

## Démonstration[Unicité de la limite]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l_1, l_2, l_1 \neq l_2$ les limites de $f$ en $x_0 \in \overline{D_f}$.

| Cas | $l_1$ | $l_2$ |
|---|---|---|
| 1 | $\in \mathbb{R}$ | $\in \mathbb{R}$ |
| 2 | $\in \mathbb{R}$ | $\pm\infty$ |
| 3 | $-\infty$ | $+\infty$ |

Impossible

$f$ ne peut avoir deux limites différentes en un même point

[Retour au théorème]

## Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a)$, avec $h = x - x_a$ et $\lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$

## Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} \left( hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a) \right)$$

Etude de la limite quand $h \to 0$

## Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} \left( hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a) \right)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} hf'(x_a) + \lim_{h \to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h \to 0} f(x_a)$$

$$\lim(f + g) = \lim f + \lim g$$

# Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} \left( hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a) \right)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} hf'(x_a) + \lim_{h \to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h \to 0} f(x_a)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = 0 \ldots$$

$$\forall c \in \mathbb{R} \ \lim_{h \to 0} (hc) = 0$$

# Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} \left( hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a) \right)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} hf'(x_a) + \lim_{h \to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h \to 0} f(x_a)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = 0 + 0 \ldots$$

$\lim_{h \to 0} (h\varepsilon(h)) = 0$ car $h \to 0$
et par définition de $\varepsilon$

## Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = \lim_{h\to 0}\left(hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a)\right)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = \lim_{h\to 0} hf'(x_a) + \lim_{h\to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h\to 0} f(x_a)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = 0 + 0 + f(x_a)$$

$\lim_{h\to 0}(c) = c$ car $h$ n'intervient pas

# Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} \left( hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a) \right)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} hf'(x_a) + \lim_{h \to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h \to 0} f(x_a)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = f(x_a)$$

# Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = \lim_{h\to 0}\left(hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a)\right)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = \lim_{h\to 0} hf'(x_a) + \lim_{h\to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h\to 0} f(x_a)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = f(x_a)$$

$$\lim_{x\to x_a} f(x) = f(x_a)$$

$$\lim_{h\to 0} f(k + h) = \lim_{x\to k} f(x)$$

# Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} \left( hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a) \right)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = \lim_{h \to 0} hf'(x_a) + \lim_{h \to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h \to 0} f(x_a)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_a + h) = f(x_a)$$

$$\lim_{x \to x_a} f(x) = f(x_a)$$ Définition de la continuité

# Démonstration[Continuité d'une fonction dérivable]

Soit une fonction $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_a \in D_f$. Par définition:

$$f(x_a + h) = hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a), \text{ avec } h = x - x_a \text{ et } \lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = \lim_{h\to 0}\left(hf'(x_a) + h\varepsilon(h) + f(x_a)\right)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = \lim_{h\to 0} hf'(x_a) + \lim_{h\to 0} h\varepsilon(h) + \lim_{h\to 0} f(x_a)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_a + h) = f(x_a)$$

$\lim_{x\to x_a} f(x) = f(x_a)$ Définition de la continuité

[Retour au théorème]

## Démonstration[Signe de dérivée et extremum local]

A Faire...

[Retour au théorème]

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Calcul du taux d'accroissement

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Minimum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Maximum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Calcul des limites de $\tau$ à gauche

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Minimum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \longleftarrow x - c < 0 \longrightarrow \lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Maximum local

$$f(x) - f(c) \geq 0 \qquad f(x) - f(c) \leq 0$$

Il est admis que les limites conservent les inégalités larges

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Minimum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Maximum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

Calcul des limites de $\tau$ à droite

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Minimum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$f(x) - f(c) \geq 0$$

Maximum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

$x - c > 0$

Il est admis que les limites conservent les inégalités larges

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Minimum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Maximum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \tau = \lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^+} \tau$$

Car $f$ est dérivable et par le lien limite gauche / limite droite

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Minimum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Maximum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \tau = \lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^+} \tau$$

$f'(c)$ doit valider les 2 hypothèses dans chaque cas

## Démonstration[Points stationnaires (Fermat)]

Soit $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $I = ]a, b[ \subseteq D_f$ et soit $c \in I$ pour lequel $f$ est dérivable et admet un extremum local.

$$\tau = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Minimum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Maximum local

$$\lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \tau = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \tau = \lim_{x \to c^-} \tau = \lim_{x \to c^+} \tau \text{ donc } f'(c) = 0$$

Seul 0 valide les hypothèses

[Retour au théorème]

## Propriété[Fonction convexe / dérivée]

A faire…

[Retour au théorème]

## Démonstration[Minimum d'une fonction convexe]

A faire...

[Retour au théorème]

## Démonstration[Dérivation de fonctions composées (Chain rule)]

A faire...

[Retour au théorème]

## Démonstration[Condition suffisante de différentiabilité]

A faire...

[Retour au théorème]

## Preuve[Points stationnaires en dimension $n$ (Fermat)]

A faire…

[Retour au théorème]

## Démonstration[Fonction convexe en dimension $n$]

A faire...

[Retour au théorème]

## Théorème[Minimum d'une fonction convexe en dimension $n$]

A faire…

[Retour au théorème]

# Sources

- Etudes de fonctions
  - Généralités – *Cahier de Prépa.fr*
    https://cahier-de-prepa.fr/1bcpst1-montaigne/docs?rep=215
  - Etude de fonctions – *Licence de Mathématiques Lyon 1*
    https://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a24:s1_analyse1_maths:poly-analyse1.pdf
  - Limites de fonctions – *Prépa Lycée Blaise Pascal, Rouen*
    https://prepa.louatron.fr/media/archives/2016-2017/documents/chapitre17-fonctions-continues.pdf
  - Fonctions à plusieurs variables – *EPLF MATHGEOII*
    https://wiki.epfl.ch/mathgeo2/documents/2014/FONCTIONS%20DIFFERENTIABLES%202014.pdf

# Cheminement

