

Intelligence Artificielle Symbolique

Logique du Premier Ordre: Sémantique



Julien SEINTURIER
Maître de Conférences

Université de Toulon
julien.seinturier@univ-tln.fr
<https://web.seinturier.fr/teaching>

Rappel

- Dans le cadre de la logique, les formules sont évaluées comme étant *vraies* ou *fausses*
- Par convention il est courant de représenter l'ensemble $\{vrai, faux\}$ sous la forme $\{T, \perp\}$ avec:
 - $T \equiv vrai$ (Top)
 - $\perp \equiv faux$ (Bot)
- T et $\perp$ peuvent être à la fois utilisés comme des symboles (et être composants de formules) ou comme des valeurs de vérité

Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

L'itinéraire est dangereux s'il existe une route verglacée.

Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

L'itinéraire est dangereux s'il existe une route verglacée.

froid

$$\blacksquare \mathcal{P} = \{ \underset{\text{pluie}}{p(x)}, \underset{\text{verglas}}{f(x)}, \underset{\text{verglas}}{v(x, y)} \}$$

Trois prédicats

Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

L'itinéraire est dangereux s'il existe une route verglacée.

■ $\mathcal{X} = \{x, y\}$

Deux variables nécessaires

■ $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une **ville de départ** jusqu'à une **ville d'arrivée**.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

L'itinéraire est dangereux s'il existe une route verglacée.

■ $\mathcal{X} = \{x, y\}$ et $\mathcal{K} = \{\textit{depart}, \textit{arrivee}\}$

Deux constantes (départ et arrivée)

■ $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

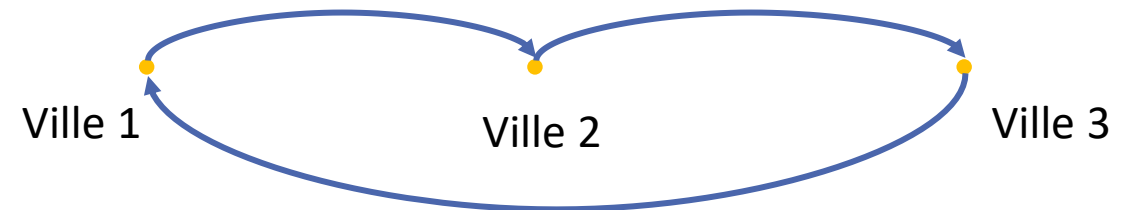
Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une **suite de villes étapes** ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

L'itinéraire est dangereux s'il existe une route verglacée.

- $\mathcal{X} = \{x, y\}$ et $\mathcal{K} = \{depart, arrivee\}$
- $\mathcal{F} = \{s(x)\}$ Une fonction pour passer d'une ville étape à la suivante
- $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$



Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. **S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante** alors il y a des **risques de verglas** entre elles

L'itinéraire est dangereux s'il existe une route verglacée.

- $\mathcal{X} = \{x, y\}$ et $\mathcal{C} = \{depart, arrivee\}$
- $\mathcal{F} = \{s(x)\}$
- $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$
- Verglas: $(p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$

Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

L'itinéraire est dangereux **s'il existe une route verglacée.**

■ $\mathcal{X} = \{x, y\}$ et $\mathcal{C} = \{depart, arrivee\}$

■ $\mathcal{F} = \{s(x)\}$

■ $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

■ Verglas: $(p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \longrightarrow v(x, s(x))$

■ Danger: **$\exists x \exists y v(x, y)$**

Cas d'étude

Un itinéraire est composé d'une suite de villes étapes ordonnées à partir d'une ville de départ jusqu'à une ville d'arrivée.

Dans chaque ville, il se peut qu'il pleuve ou qu'il fasse froid. S'il pleut et qu'il fait froid dans une étape ou sa suivante alors il y a des risques de verglas entre elles

L'itinéraire est dangereux s'il existe une route verglacée.

$$\blacksquare \mathcal{X} = \{x, y\} \text{ et } \mathcal{C} = \{depart, arrivee\}$$

$$\blacksquare \mathcal{F} = \{s(x)\}$$

$$\blacksquare \mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$$

$$\blacksquare \text{ Verglas: } (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \longrightarrow v(x, s(x))$$

$$\blacksquare \text{ Danger: } \exists x \exists y v(x, y)$$

Comment interpréter ?
Donner un sens ?

Interprétation

L'interprétation d'un ensemble de formule du premier ordre repose sur:

- Les valeurs que peuvent prendre les variables et les constantes
- La définition des fonctions
- La définition des prédicats

Définition[Domaine d'interprétation]

Un **domaine d'interprétation**, noté Ω_I , est un ensemble composé d'éléments dans lequel des **variables** et des **constantes** peuvent prendre leurs valeurs

Définition[Domaine d'interprétation]

Un **domaine d'interprétation**, noté $\Omega_{\mathcal{I}}$, est un ensemble composé d'éléments dans lequel des **variables** et des **constantes** peuvent prendre leurs valeurs

- **Propriété:** Peut être **fini** ou **infini**

Définition[Domaine d'interprétation]

Un **domaine d'interprétation**, noté $\Omega_{\mathcal{I}}$, est un ensemble composé d'éléments dans lequel des **variables** et des **constantes** peuvent prendre leurs valeurs

- **Propriété:** Peut être **fini** ou **infini**
- **Propriété:** Peut être **dénombrable** ou **indénombrable**

Définition[Domaine d'interprétation]

Un **domaine d'interprétation**, noté Ω_I , est un ensemble composé d'éléments dans lequel des **variables** et des **constantes** peuvent prendre leurs valeurs

- **Propriété:** Peut être **fini** ou **infini**
- **Propriété:** Peut être **dénombrable** ou **indénombrable**
- Un domaine d'interprétation est l'espace sur lesquels sont exprimés les **prédicats** et les **fonctions**

Exemple

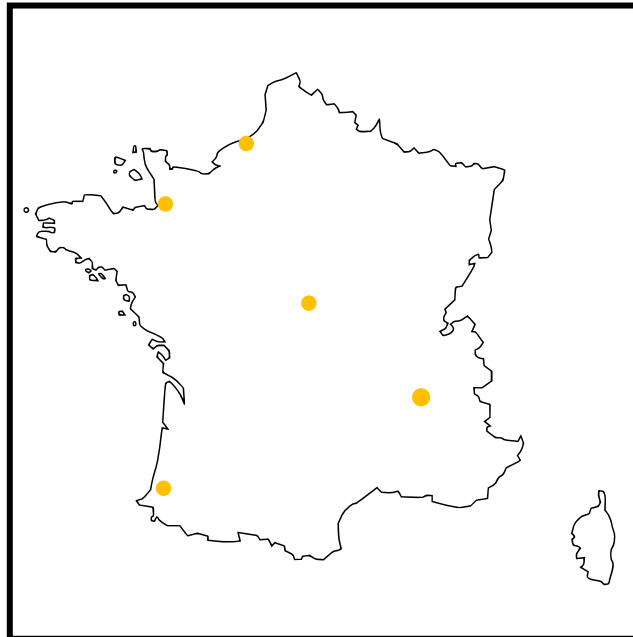
$$\mathcal{X} = \{x, y\}, \mathcal{C} = \{\textit{depart}, \textit{arrivee}\}, \mathcal{F} = \{s(x)\}, \\ \mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$$

Exemple

$\mathcal{X} = \{x, y\}$, $\mathcal{C} = \{\text{depart}, \text{arrivee}\}$, $\mathcal{F} = \{s(x)\}$,
 $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

■ Domaine d'interprétation

$\Omega_f = \left\{ \begin{array}{l} \text{Avranches,} \\ \text{Bourges,} \\ \text{Dax,} \\ \text{Dieppe,} \\ \text{Grenoble} \end{array} \right\}$

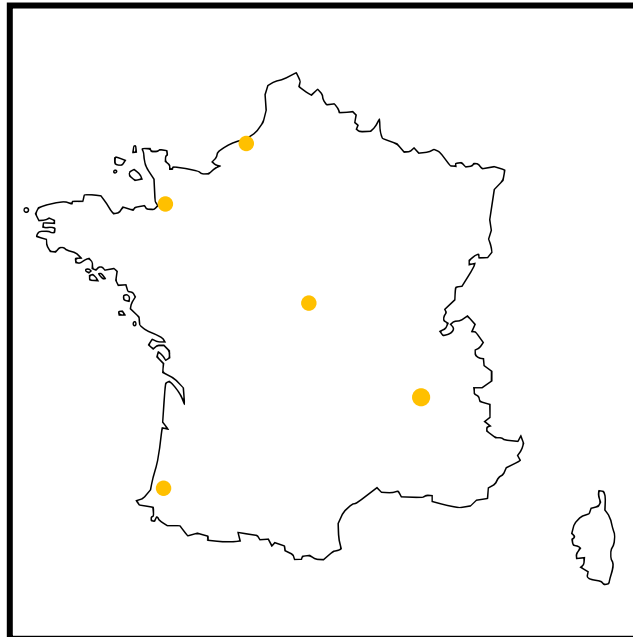


Exemple

$\mathcal{X} = \{x, y\}$, $\mathcal{C} = \{\text{depart}, \text{arrivee}\}$, $\mathcal{F} = \{s(x)\}$,
 $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

■ Domaine d'interprétation

$\Omega_f = \left\{ \begin{array}{l} \text{Avranches,} \\ \text{Bourges,} \\ \text{Dax,} \\ \text{Dieppe,} \\ \text{Grenoble} \end{array} \right\}$



x et y peuvent prendre l'une des valeurs du domaine

Exemple

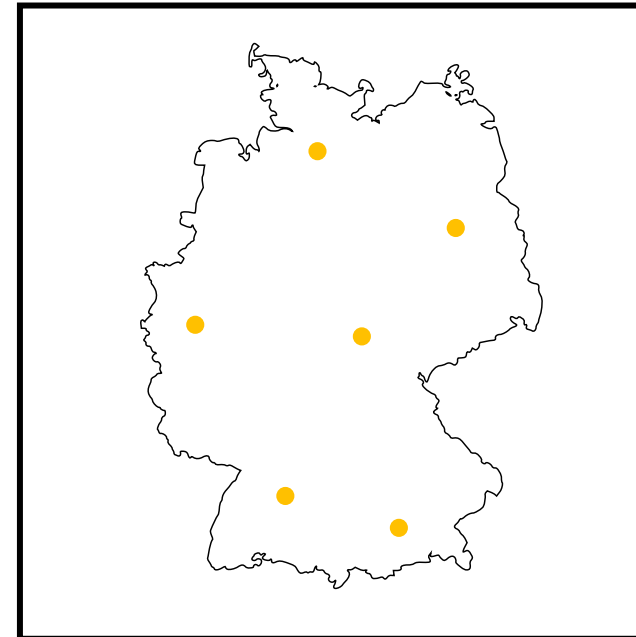
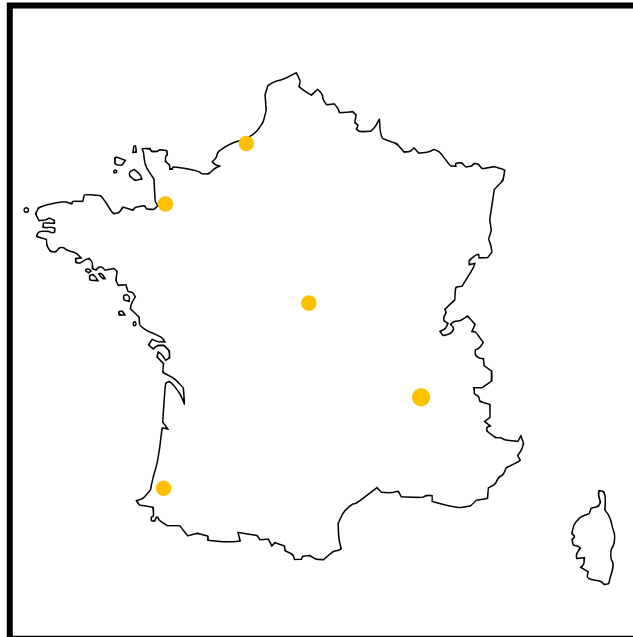
$$\mathcal{X} = \{x, y\}, \mathcal{C} = \{\text{depart}, \text{arrivee}\}, \mathcal{F} = \{s(x)\},$$

$$\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$$

■ Domaines d'interprétation

Plusieurs domaines sont possibles

$$\Omega_f = \left\{ \begin{array}{l} \text{Avranches,} \\ \text{Bourges,} \\ \text{Dax,} \\ \text{Dieppe,} \\ \text{Grenoble} \end{array} \right\}$$



$$\Omega_f = \left\{ \begin{array}{l} \text{Berlin,} \\ \text{Düsseldorf,} \\ \text{Erfurt,} \\ \text{Hambourg,} \\ \text{Munich,} \\ \text{Stuttgart} \end{array} \right\}$$

Exemple

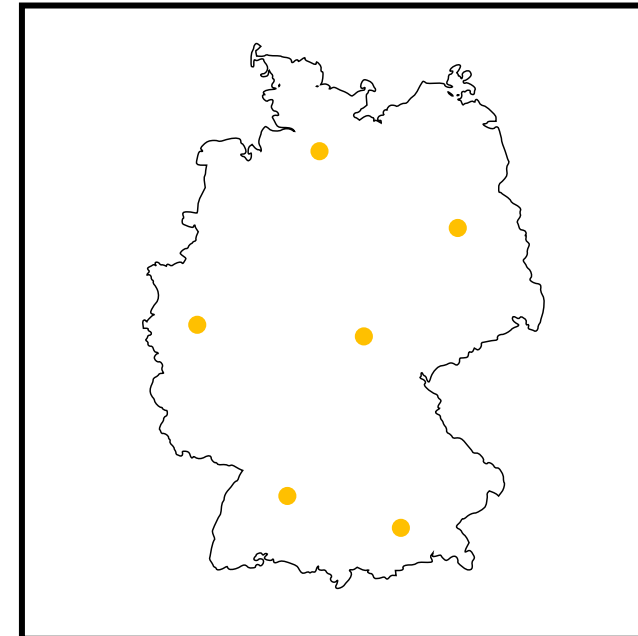
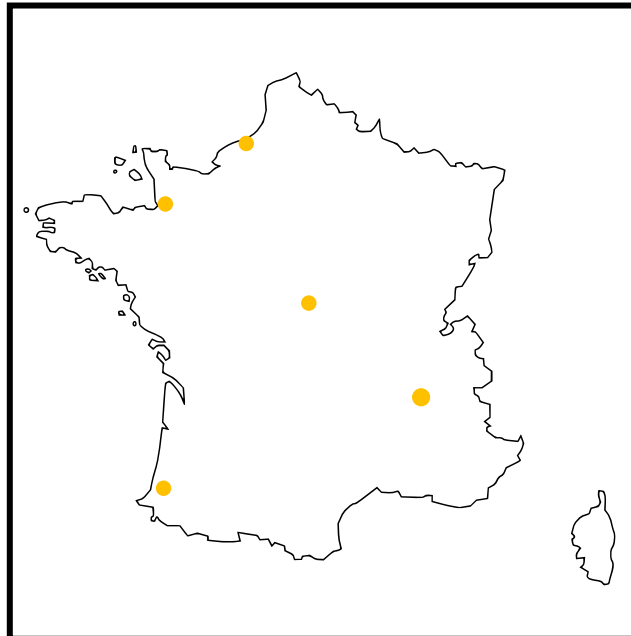
$$\mathcal{X} = \{x, y\}, \mathcal{C} = \{\textit{depart}, \textit{arrivee}\}, \mathcal{F} = \{s(x)\},$$

$$\mathcal{P} = \{\textit{p}(x), \textit{f}(x), \textit{v}(x, y)\}$$

■ Domaines d'interprétation

Pour les constantes, les fonctions et les prédicats ?

$$\Omega_f = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Avranches}, \\ \textit{Bourges}, \\ \textit{Dax}, \\ \textit{Dieppe}, \\ \textit{Grenoble} \end{array} \right\}$$



$$\Omega_g = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Berlin}, \\ \textit{Düsseldorf}, \\ \textit{Erfurt}, \\ \textit{Hambourg}, \\ \textit{Munich}, \\ \textit{Stuttgart} \end{array} \right\}$$

Définition[Interprétation]

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes, $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions, $\mathcal{P}$ un ensemble de prédicats et $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une interprétation, notée $\mathcal{I}$, de la logique du premier ordre est définie par:

Définition[Interprétation]

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes, $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions, $\mathcal{P}$ un ensemble de prédicats et $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une interprétation, notée $\mathcal{I}$, de la logique du premier ordre est définie par:

- Une application de valuation des constantes $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}: \mathcal{C} \rightarrow \Omega_{\mathcal{I}}$
 $c \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{I}}(c)$

L'application $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ associe à chaque constante sa valeur dans $\Omega_{\mathcal{I}}$

Définition[Interprétation]

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes, $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions, $\mathcal{P}$ un ensemble de prédicats et $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une **interprétation**, notée $\mathcal{I}$, de la logique du premier ordre est définie par:

■ Une application de valuation des constantes $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}: \mathcal{C} \rightarrow \Omega_{\mathcal{I}}$
 $c \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{I}}(c)$

■ Un ensemble d'applications $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ tel que:

$$\forall f \in \mathcal{F} \text{ un symbole de fonction d'arité } n, \exists f_{\mathcal{I}}^n \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \quad f_{\mathcal{I}}^n: \Omega_{\mathcal{I}}^n \rightarrow \Omega_{\mathcal{I}} \\ (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_{\mathcal{I}}^n(e_1, \dots, e_n)$$

A chaque fonction $f \in \mathcal{F}$ est associée une application $f_{\mathcal{I}}$ qui permet calculer la valeur de f dans le domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$

Définition[Interprétation]

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes, $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions, $\mathcal{P}$ un ensemble de prédicats et $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une **interprétation**, notée $\mathcal{I}$, de la logique du premier ordre est définie par:

- Une application de valuation des constantes $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}: \mathcal{C} \rightarrow \Omega_{\mathcal{I}}$

$$c \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{I}}(c)$$

- Un ensemble d'applications $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ tel que:

$$\forall f \in \mathcal{F} \text{ un symbole de fonction d'arité } n, \exists f_{\mathcal{I}}^n \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \quad f_{\mathcal{I}}^n: \Omega_{\mathcal{I}}^n \rightarrow \Omega_{\mathcal{I}} \\ (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_{\mathcal{I}}^n(e_1, \dots, e_n)$$

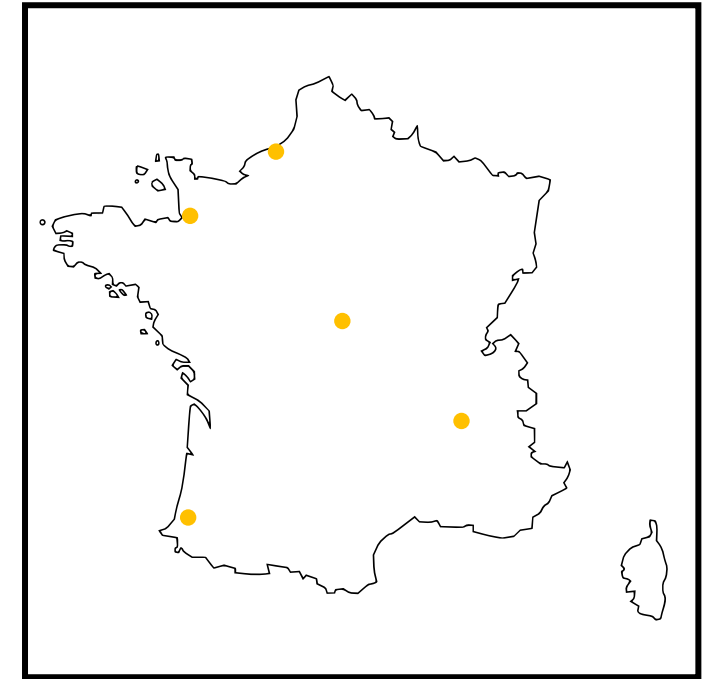
- Un ensemble d'applications $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ tel que:

$$\forall P \in \mathcal{P}, \text{ un symbole de prédicat d'arité } n, \exists P_{\mathcal{I}}^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}} \quad P_{\mathcal{I}}^n: \Omega_{\mathcal{I}}^n \rightarrow \{\top, \perp\} \\ (e_1, \dots, e_n) \mapsto P_{\mathcal{I}}^n(e_1, \dots, e_n)$$

Exemple

■ $\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$

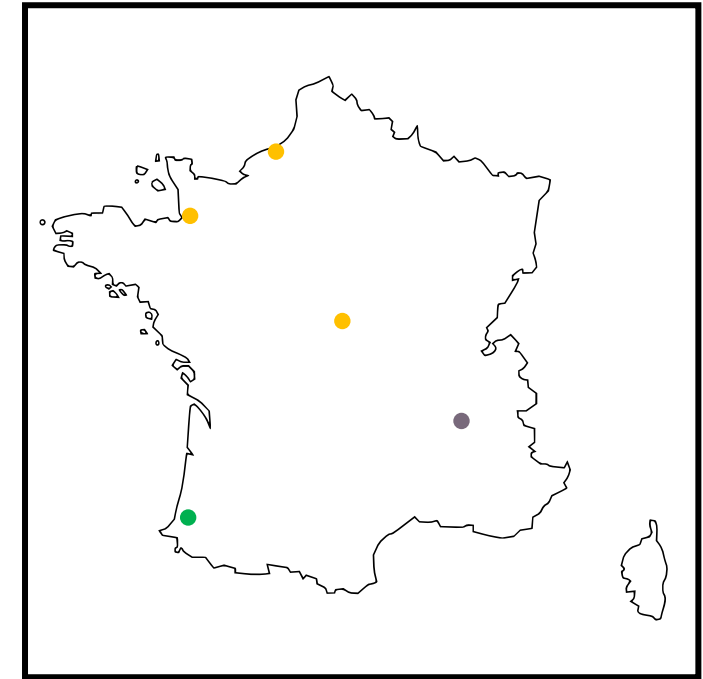
Domaine (pour les variables)



Exemple

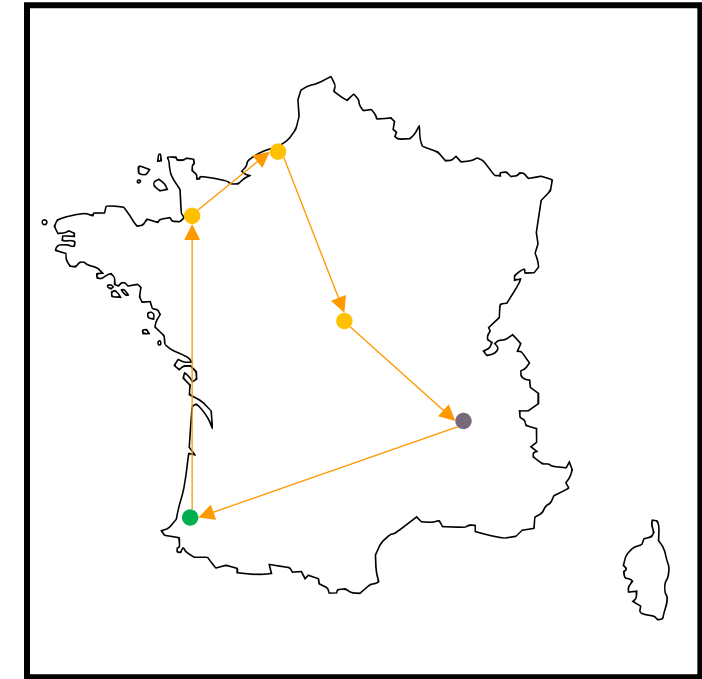
- $\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$
- $C_j: \text{depart} \rightarrow Dax, \text{arrivee} \rightarrow Grenoble$

Valeurs des constantes



Exemple

- $\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$
- $C_j: \text{depart} \rightarrow Dax, \text{arrivee} \rightarrow Grenoble$
- $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$
 $s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe,$
 $s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble$
 $s_j(Grenoble) = Dax$



Définition des fonctions

Exemple

■ $\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$

■ $C_j: \text{depart} \rightarrow Dax, \text{arrivee} \rightarrow Grenoble$

■ $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$

$s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe,$

$s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble$

$s_j(Grenoble) = Dax$

■ $\mathcal{P}_j = \{p_j, f_j\}$

$p_j(Avranches) = \top$

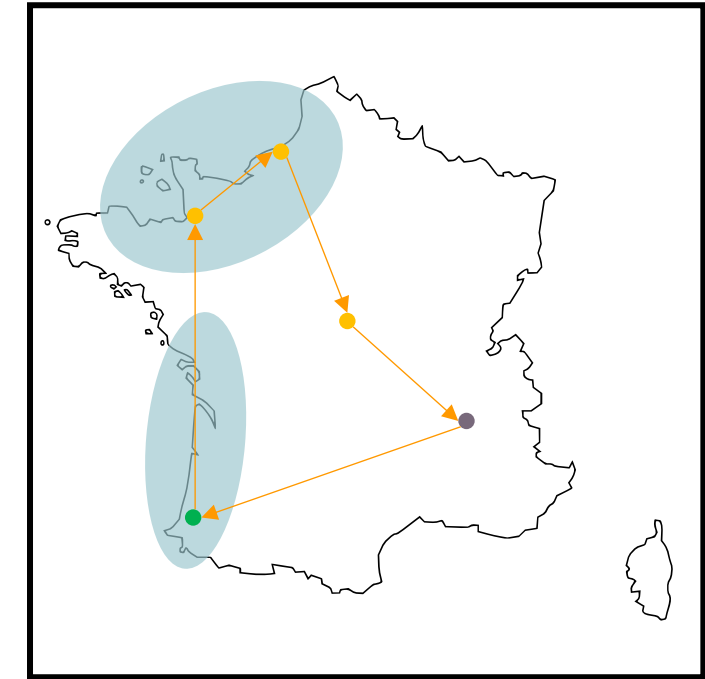
$p_j(Bourges) = \perp$

$p_j(Dax) = \top$

$p_j(Dieppe) = \top$

$p_j(Grenoble) = \perp$

Pluie



Définition des
prédicats

Exemple

■ $\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$

■ $C_j: \text{depart} \rightarrow Dax, \text{arrivee} \rightarrow Grenoble$

■ $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$

$s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe,$

$s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble$

$s_j(Grenoble) = Dax$

■ $\mathcal{P}_j = \{p_j, f_j\}$

Froid

$p_j(Avranches) = \top$

$f_j(Avranches) = \perp$

$p_j(Bourges) = \perp$

$f_j(Bourges) = \perp$

$p_j(Dax) = \top$

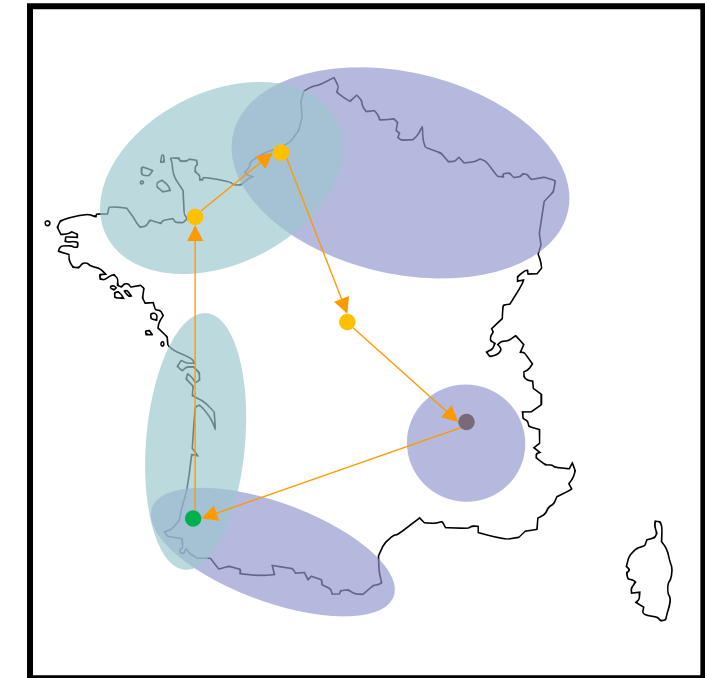
$f_j(Dax) = \top$

$p_j(Dieppe) = \top$

$f_j(Dieppe) = \top$

$p_j(Grenoble) = \perp$

$f_j(Grenoble) = \top$



Définition des
prédicats

Exemple

■ $\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$

■ $C_j: \text{depart} \rightarrow Dax, \text{arrivee} \rightarrow Grenoble$

■ $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$

$s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe,$

$s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble$

$s_j(Grenoble) = Dax$

■ $\mathcal{P}_j = \{p_j, f_j\}$

$p_j(Avranches) = \top$

$p_j(Bourges) = \perp$

$p_j(Dax) = \top$

$p_j(Dieppe) = \top$

$p_j(Grenoble) = \perp$

$f_j(Avranches) = \perp$

$f_j(Bourges) = \perp$

$f_j(Dax) = \top$

$f_j(Dieppe) = \top$

$f_j(Grenoble) = \top$

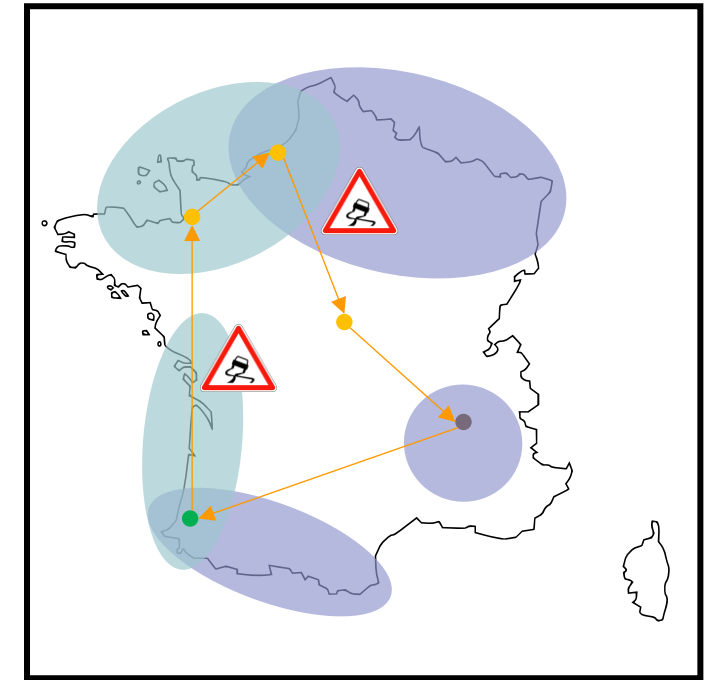
$v_j(Dax, Avranches) = \top$

$v_j(Avranches, Dieppe) = \perp$

$v_j(Dieppe, Bourges) = \top$

$v_j(Bourges, Grenoble) = \perp$

$v_j(Grenoble, Dax) = \perp$



Verglas

Exemple

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$\mathcal{C}_J: \text{depart} \rightarrow Dax, \text{arrivee} \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J\}$$

$$s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax$$

$$\mathcal{P}_J = \{p_J, f_J\}$$

$$p_J(Avranches) = \top$$

$$p_J(Bourges) = \perp$$

$$p_J(Dax) = \top$$

$$p_J(Dieppe) = \top$$

$$p_J(Grenoble) = \perp$$

$$f_J(Avranches) = \perp$$

$$f_J(Bourges) = \perp$$

$$f_J(Dax) = \top$$

$$f_J(Dieppe) = \top$$

$$f_J(Grenoble) = \top$$

$$v_J(Dax, Avranches) = \top$$

$$v_J(Avranches, Dieppe) = \perp$$

$$v_J(Dieppe, Bourges) = \top$$

$$v_J(Bourges, Grenoble) = \perp$$

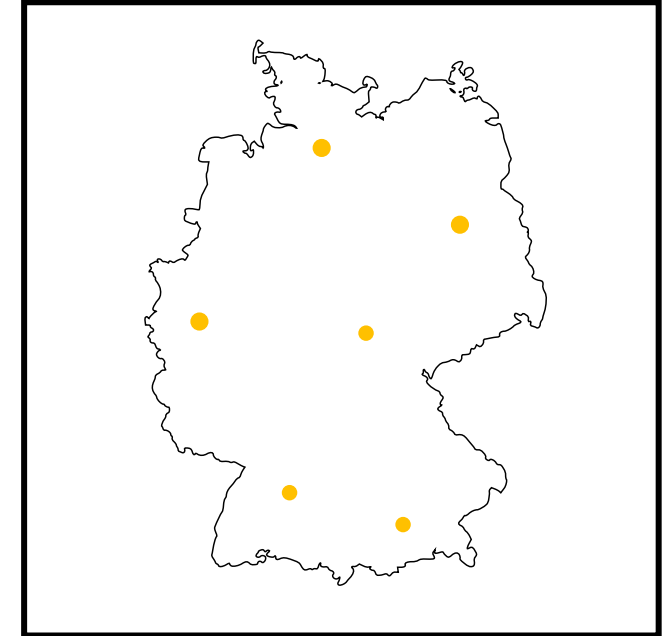
$$v_J(Grenoble, Dax) = \perp$$

J

Interprétation

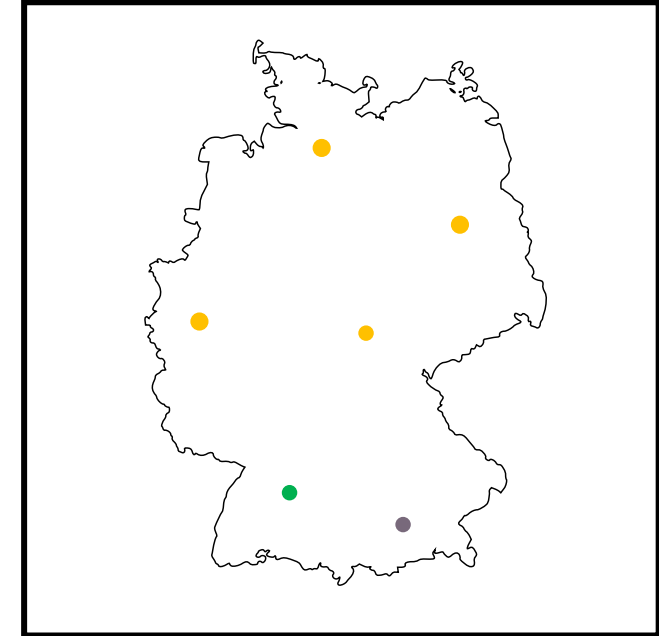
Exemple

■ $\Omega_f = \{Berlin, Düsseldorf, Erfurt, Hamburg, Munich, Stuttgart\}$



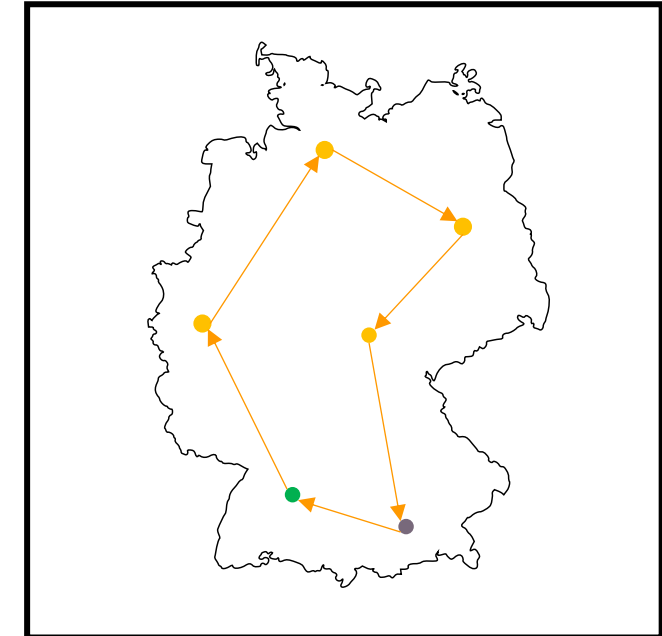
Exemple

- $\Omega_j = \{Berlin, Düsseldorf, Erfurt, Hamburg, Munich, Stuttgart\}$
- $C_j: depart \rightarrow Stuttgart, arrivee \rightarrow Munich$



Exemple

- $\Omega_j = \{Berlin, Düsseldorf, Erfurt, Hamburg, Munich, Stuttgart\}$
- $C_j: depart \rightarrow Stuttgart, arrivee \rightarrow Munich$
- $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$
 $s_j(Stuttgart) = Düsseldorf, s_j(Düsseldorf) = Hamburg,$
 $s_j(Hamburg) = Berlin, s_j(Berlin) = Erfurt,$
 $s_j(Erfurt) = Munich, s_j(Munich) = Stuttgart$



Exemple

■ $\Omega_j = \{Berlin, Düsseldorf, Erfurt, Hamburg, Munich, Stuttgart\}$

■ $\mathcal{C}_j: \text{depart} \rightarrow Stuttgart, \text{arrivee} \rightarrow Munich$

■ $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$

$s_j(Stuttgart) = Düsseldorf, s_j(Düsseldorf) = Hamburg,$

$s_j(Hamburg) = Berlin, s_j(Berlin) = Erfurt,$

$s_j(Erfurt) = Munich, s_j(Munich) = Stuttgart$

■ $\mathcal{P}_j = \{p_j, f_j\}$

$p_j(Berlin) = \perp$

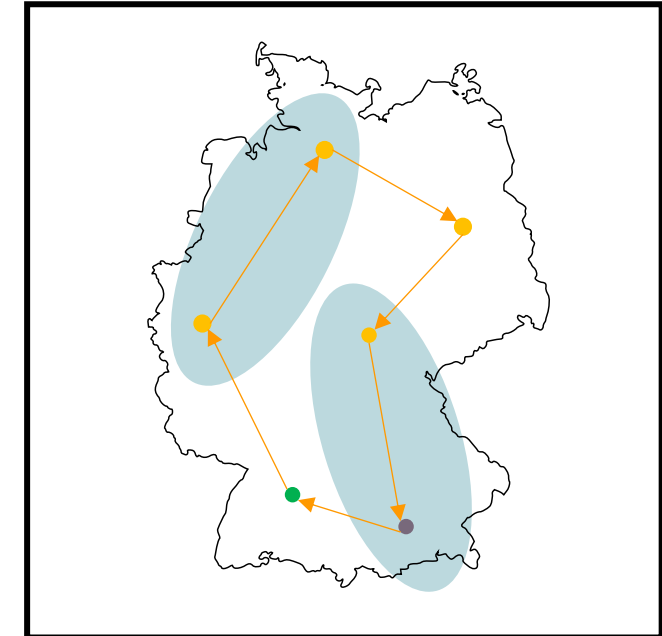
$p_j(Stuttgart) = \perp$

$p_j(Düsseldorf) = \top$

$p_j(Erfurt) = \top$

$p_j(Hamburg) = \top$

$p_j(Munich) = \top$



Exemple

■ $\Omega_j = \{Berlin, Düsseldorf, Erfurt, Hamburg, Munich, Stuttgart\}$

■ $\mathcal{C}_j: depart \rightarrow Stuttgart, arrivee \rightarrow Munich$

■ $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$

$s_j(Stuttgart) = Düsseldorf, s_j(Düsseldorf) = Hamburg,$
 $s_j(Hamburg) = Berlin, s_j(Berlin) = Erfurt,$
 $s_j(Erfurt) = Munich, s_j(Munich) = Stuttgart$

■ $\mathcal{P}_j = \{p_j, f_j\}$

$p_j(Berlin) = \perp$

$p_j(Stuttgart) = \perp$

$f_j(Munich) = \perp$

$p_j(Düsseldorf) = \top$

$f_j(Berlin) = \top$

$f_j(Stuttgart) = \perp$

$p_j(Erfurt) = \top$

$f_j(Düsseldorf) = \perp$

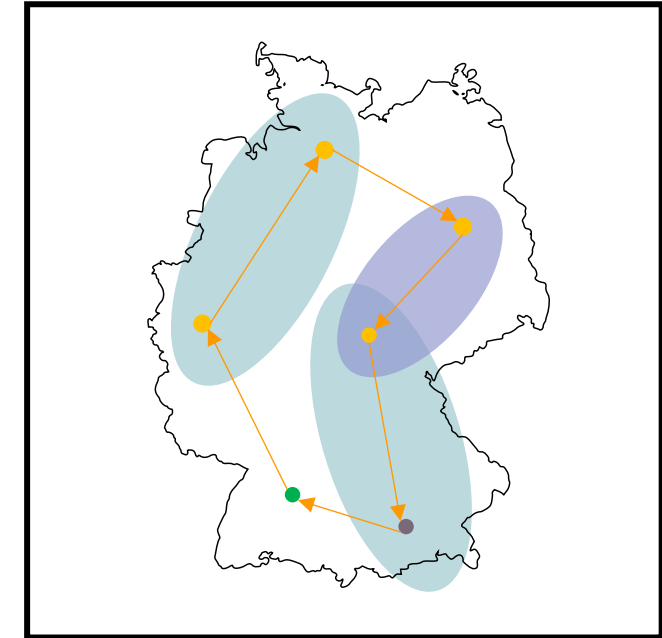
$p_j(Hamburg) = \top$

$f_j(Erfurt) = \top$

$p_j(Munich) = \top$

$f_j(Hamburg) = \perp$

...



Exemple

■ $\Omega_j = \{Berlin, Düsseldorf, Erfurt, Hamburg, Munich, Stuttgart\}$

■ $\mathcal{C}_j: \text{depart} \rightarrow Stuttgart, \text{arrivee} \rightarrow Munich$

■ $\mathcal{F}_j: \{s_j\}$

$s_j(Stuttgart) = Düsseldorf, s_j(Düsseldorf) = Hamburg,$

$s_j(Hamburg) = Berlin, s_j(Berlin) = Erfurt,$

$s_j(Erfurt) = Munich, s_j(Munich) = Stuttgart$

■ $\mathcal{P}_j = \{p_j, f_j\}$

$p_j(Berlin) = \perp$

$p_j(Düsseldorf) = \top$

$p_j(Erfurt) = \top$

$p_j(Hamburg) = \top$

$p_j(Munich) = \top$

$p_j(Stuttgart) = \perp$

$f_j(Berlin) = \top$

$f_j(Düsseldorf) = \perp$

$f_j(Erfurt) = \top$

$f_j(Hamburg) = \perp$

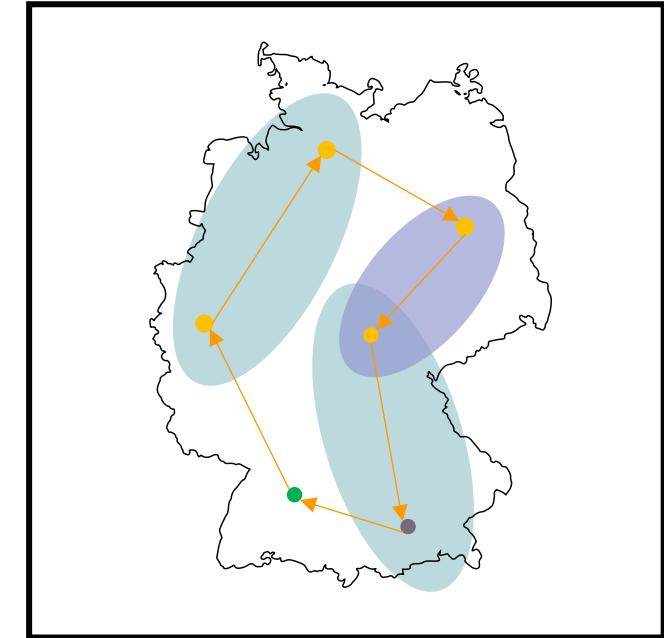
$f_j(Munich) = \perp$

$f_j(Stuttgart) = \perp$

$v_j(Stuttgart, Düsseldorf) = \perp$

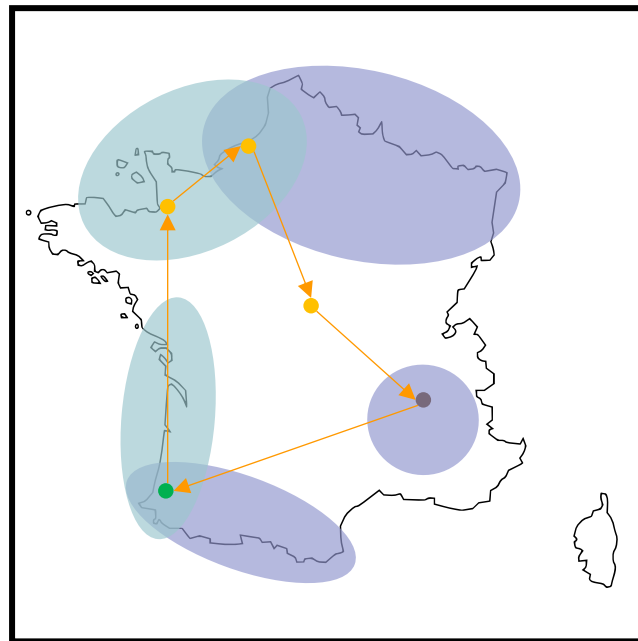
$v_j(Düsseldorf, Hamburg) = \perp$

...

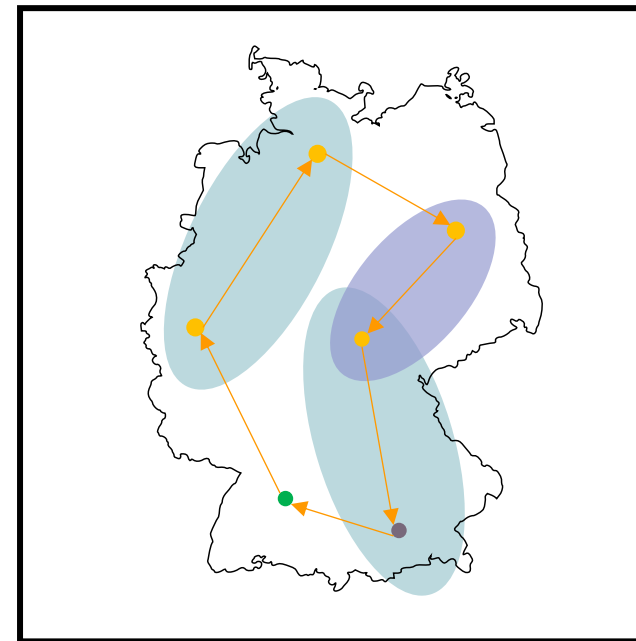


Exemple

- Deux interprétations



$\mathcal{I}_f$



$\mathcal{I}_g$

Ecriture ensembliste

- Interprétation d'un ensemble de prédicats:

$$\forall P \in \mathcal{P}, \text{ un symbole de prédicat d'arité } n, \exists P_j^n \in \mathcal{P}_j \quad P_j^n: \Omega_j^n \longrightarrow \{\top, \perp\}$$
$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto P_j^n(e_1, \dots, e_n)$$

- Chaque P_j peut être vue comme une appartenance à un ensemble

- $\mathcal{P}_j$ peut être représenté comme un ensemble d'ensembles tel que:

$$\forall P \in \mathcal{P}, \exists P_j^n \in \mathcal{P}_j \quad P(e_1, \dots, e_n) = \top \text{ ssi } P_j^n(e_1, \dots, e_n) \in P_j^n$$

Exemple

$\Omega_f = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$ et $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

Exemple

$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$ et $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

$\mathcal{P}_J = \{p_J, f_J\}$

$p_J(Avranches) = \top$

$f_J(Avranches) = \perp$

$v_J(Dax, Avranches) = \top$

$p_J(Bourges) = \perp$

$f_J(Bourges) = \perp$

$v_J(Avranches, Dieppe) = \perp$

$p_J(Dax) = \top$

$f_J(Dax) = \top$

$v_J(Dieppe, Bourges) = \top$

$p_J(Dieppe) = \top$

$f_J(Dieppe) = \top$

$v_J(Bourges, Grenoble) = \perp$

$p_J(Grenoble) = \perp$

$f_J(Grenoble) = \top$

$v_J(Grenoble, Dax) = \perp$

Ecriture applicative: $p(x)$ est vrai ssi $p_J(x) = \text{vrai}$

Exemple

$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$ et $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

$\mathcal{P}_J = \{p_J, f_J\}$

$p_J(Avranches) = \top$

$p_J(Bourges) = \perp$

$p_J(Dax) = \top$

$p_J(Dieppe) = \top$

$p_J(Grenoble) = \perp$

$f_J(Avranches) = \perp$

$f_J(Bourges) = \perp$

$f_J(Dax) = \top$

$f_J(Dieppe) = \top$

$f_J(Grenoble) = \top$

$v_J(Dax, Avranches) = \top$

$v_J(Avranches, Dieppe) = \perp$

$v_J(Dieppe, Bourges) = \top$

$v_J(Bourges, Grenoble) = \perp$

$v_J(Grenoble, Dax) = \perp$

$\mathcal{P}_J = \{p_J, f_J\}$

$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$

$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$

$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$

Ecriture ensembliste:

$p(x)$ est vrai ssi $p_J(x) \in p_J$

Exemple

$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$ et $\mathcal{P} = \{p(x), f(x), v(x, y)\}$

$\mathcal{P}_J = \{p_J, f_J\}$

$p_J(Avranches) = \top$

$f_J(Avranches) = \perp$

$v_J(Dax, Avranches) = \top$

$p_J(Bourges) = \perp$

$f_J(Bourges) = \perp$

$v_J(Avranches, Dieppe) = \perp$

$p_J(Dax) = \top$

$f_J(Dax) = \top$

$v_J(Dieppe, Bourges) = \top$

$p_J(Dieppe) = \top$

$f_J(Dieppe) = \top$

$v_J(Bourges, Grenoble) = \perp$

$p_J(Grenoble) = \perp$

$f_J(Grenoble) = \top$

$v_J(Grenoble, Dax) = \perp$

$\mathcal{P}_J = \{p_J, f_J\}$

$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$

$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$

$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$

Equivalence des écritures

Interprétation

- Défini le contexte dans lequel un ensemble de formule s'exprime

Interprétation

- Défini le contexte dans lequel un ensemble de formule s'exprime
- Un ensemble de formules peut avoir plusieurs interprétations

Et même une infinité !

Interprétation

- Défini le contexte dans lequel un ensemble de formule s'exprime
- Un ensemble de formules peut avoir plusieurs interprétations
- Ne permet pas d'évaluer la véracité d'une formule

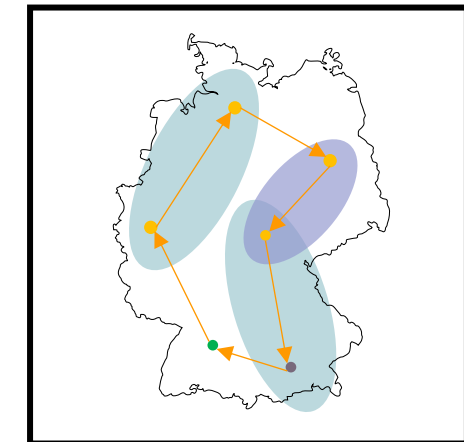
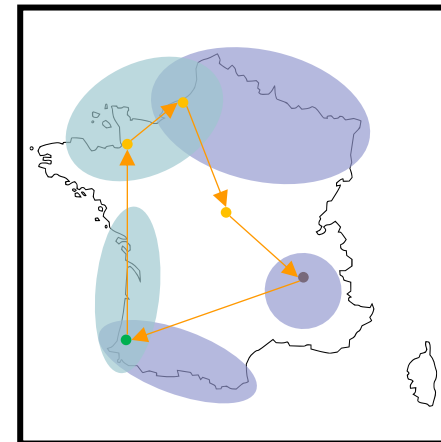
Interprétation

- Défini le contexte dans lequel un ensemble de formule s'exprime
- Un ensemble de formules peut avoir plusieurs interprétations
- Ne permet pas d'évaluer la véracité d'une formule

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, f(x))$$

- Il y a t'il du verglas ?



Interprétation

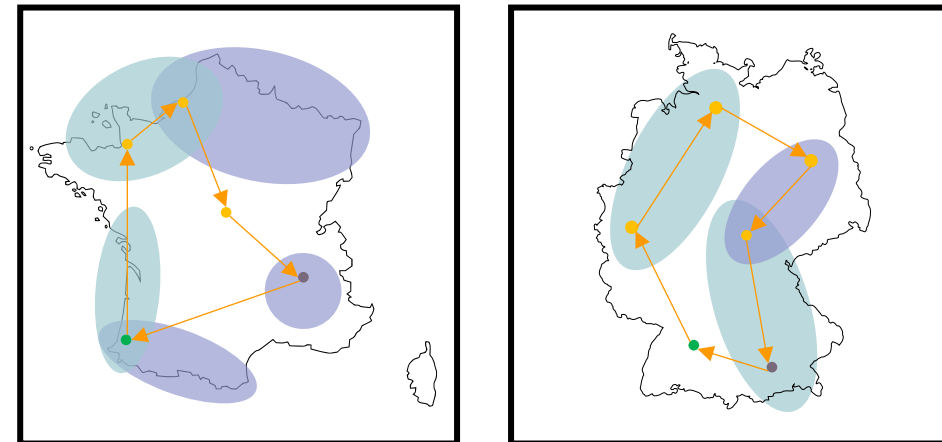
- Défini le contexte dans lequel un ensemble de formule s'exprime
- Un ensemble de formules peut avoir plusieurs interprétations
- Ne permet pas d'évaluer la véracité d'une formule

Example

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

- Il y a t'il du verglas ?

Interprétation: prédicats et fonctions



Interprétation

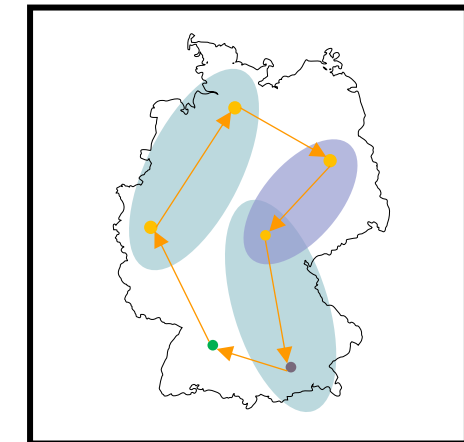
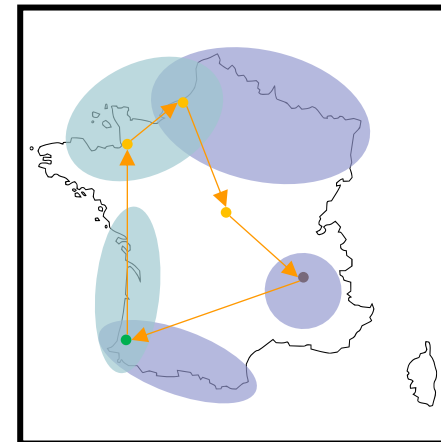
- Défini le contexte dans lequel un ensemble de formule s'exprime
- Un ensemble de formules peut avoir plusieurs interprétations
- Ne permet pas d'évaluer la véracité d'une formule

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

- Il y a t'il du verglas ?

Nécessité de connaître la valeur des variables



Définition[Etat d'interprétation]

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables et soit $\mathcal{I}$ une interprétation sur le domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$. Un **état d'interprétation**, noté e , est une application qui associe à chaque variable de $\mathcal{X}$ une valeur de $\Omega_{\mathcal{I}}$. Plus formellement:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_e: \mathcal{X} &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{I}} \\ x &\longmapsto e(x) \end{aligned}$$

Définition[Etat d'interprétation]

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables et soit $\mathcal{I}$ une *interprétation* sur le *domaine* $\Omega_{\mathcal{I}}$. Un *état d'interprétation*, noté e , est une application qui associe à chaque variable de $\mathcal{X}$ une valeur de $\Omega_{\mathcal{I}}$. Plus formellement:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_e: \mathcal{X} &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{I}} \\ x &\longmapsto e(x) \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$ et $\mathcal{X} = \{x, y\}$

Définition[Etat d'interprétation]

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables et soit $\mathcal{I}$ une *interprétation* sur le *domaine* $\Omega_{\mathcal{I}}$. Un *état d'interprétation*, noté e , est une application qui associe à chaque variable de $\mathcal{X}$ une valeur de $\Omega_{\mathcal{I}}$. Plus formellement:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_e: \mathcal{X} &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{I}} \\ x &\longmapsto e(x) \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$ et $\mathcal{X} = \{x, y\}$

■ e_1 est tel que $e_1(x) = Avranches$ et $e_1(y) = Dax$

Définition[Etat d'interprétation]

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables et soit $\mathcal{I}$ une *interprétation* sur le *domaine* $\Omega_{\mathcal{I}}$. Un *état d'interprétation*, noté e , est une application qui associe à chaque variable de $\mathcal{X}$ une valeur de $\Omega_{\mathcal{I}}$. Plus formellement:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_e: \mathcal{X} &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{I}} \\ x &\longmapsto e(x) \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$ et $\mathcal{X} = \{x, y\}$

- e_1 est tel que $e_1(x) = Avranches$ et $e_1(y) = Dax$
- e_2 est tel que $e_2(x) = Dieppe$ et $e_2(y) = Bourges$

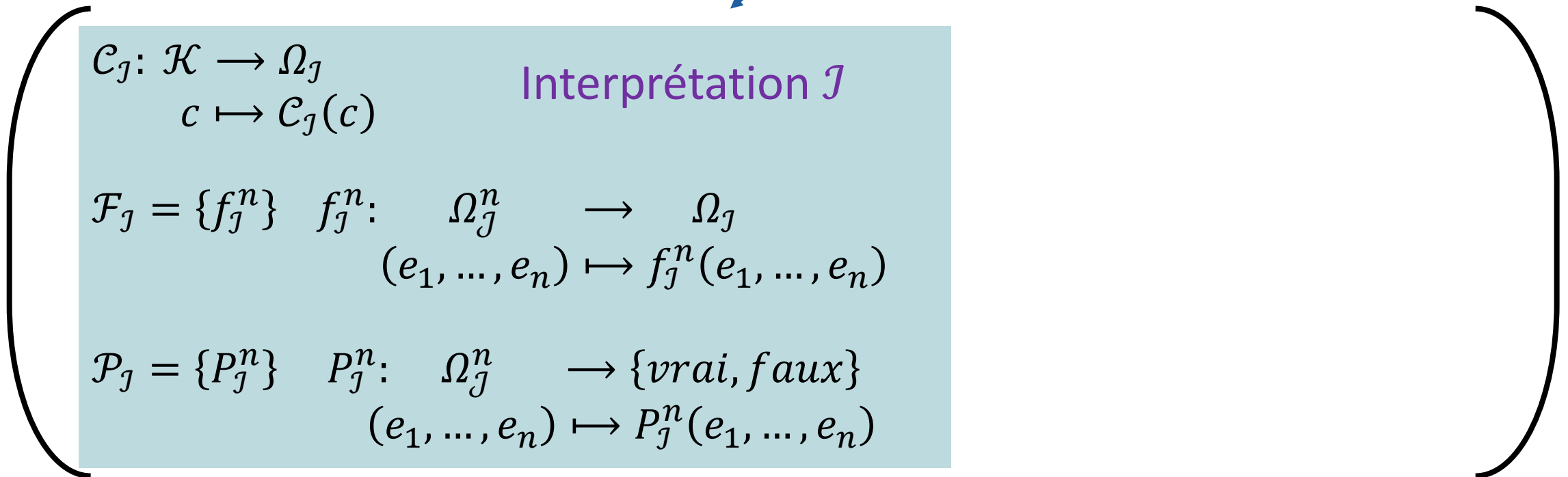
Définition[Assignment]

Soit $\mathcal{I}$ une interprétation sur le domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$. Et soit e un état d'interprétation de $\mathcal{I}$. On appelle le couple $(\mathcal{I}, e)$, noté également $\mathcal{I}_e$, une **assignation**.

Définition[Assignation]

Soit $\mathcal{I}$ une **interprétation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Et soit e un **état d'interprétation** de $\mathcal{I}$. On appelle le couple $(\mathcal{I}, e)$, noté également $\mathcal{I}_e$, une **assignation**.

Assignation



$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}}: \mathcal{K} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{I}}$$

$$c \mapsto \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(c)$$

Interprétation $\mathcal{I}$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{f_{\mathcal{I}}^n\}$$

$$f_{\mathcal{I}}^n: \Omega_{\mathcal{I}}^n \longrightarrow \Omega_{\mathcal{I}}$$

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto f_{\mathcal{I}}^n(e_1, \dots, e_n)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \{P_{\mathcal{I}}^n\}$$

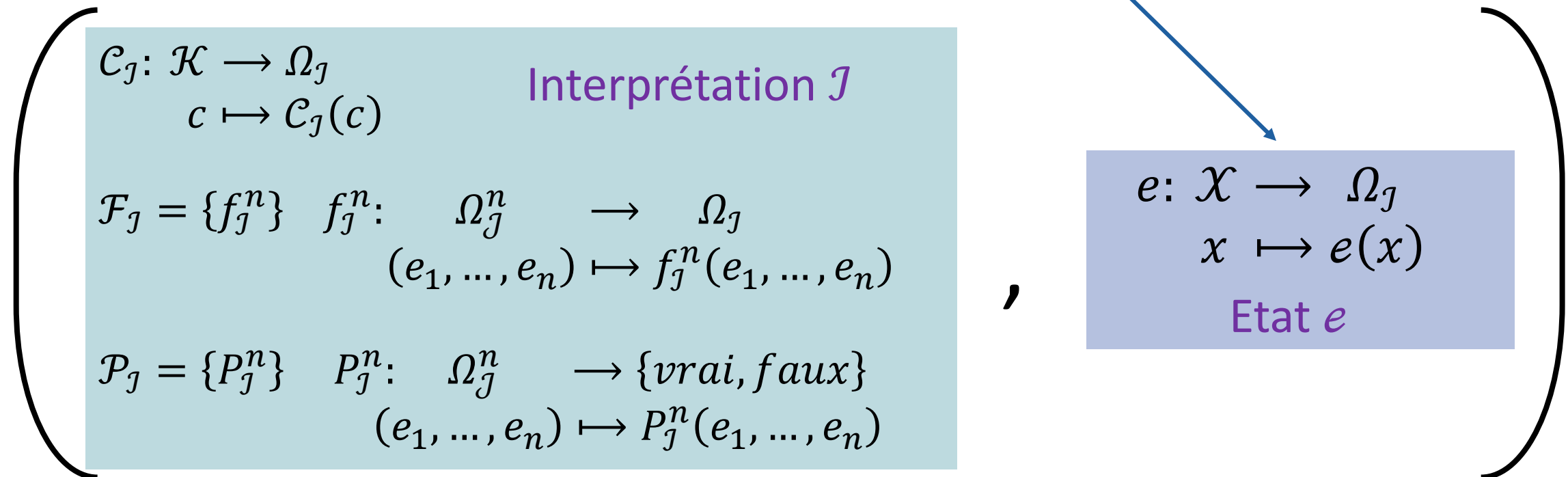
$$P_{\mathcal{I}}^n: \Omega_{\mathcal{I}}^n \longrightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$$

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto P_{\mathcal{I}}^n(e_1, \dots, e_n)$$

Définition[Assignment]

Soit $\mathcal{I}$ une interprétation sur le domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$. Et soit e un état d'interprétation de $\mathcal{I}$. On appelle le couple $(\mathcal{I}, e)$, noté également $\mathcal{I}_e$, une **assignment**.

Assignment



Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_f = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

Domaine d'interprétation

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_f = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

Valeurs des constantes

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_f = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_f: \{s_f(Dax) = Avranches, s_f(Avranches) = Dieppe, \\ s_f(Dieppe) = Bourges, s_f(Bourges) = Grenoble \\ s_f(Grenoble) = Dax\}$$

Définition des fonctions

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Définition des prédicats
(ensembliste)

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

J

Interprétation

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

$$\underbrace{e(x) = Dax}_{\text{état}}$$

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

$$\underbrace{e(x) = Dax}_e$$

J **Assignment J_e**

Exemple

$$\varphi: (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

$$e(x) = Dax$$

Valeurs des variables

Exemple

$$\varphi: (p(Dax) \wedge f(Dax)) \vee (p(s(Dax)) \wedge f(s(Dax))) \rightarrow v(Dax, s(Dax))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

Valeurs des variables

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: \{ & s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$\varphi: (p(Dax) \wedge f(Dax)) \vee (p(s(Dax)) \wedge f(s(Dax))) \rightarrow v(Dax, s(Dax))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

$$e(x) = Dax$$

Calcul des fonctions

Exemple

$$\varphi: (p(Dax) \wedge f(Dax)) \vee (p(Avranches) \wedge f(Avranches)) \rightarrow v(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

Calcul des fonctions

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$\varphi: (p(Dax) \wedge f(Dax)) \vee (p(Avranches) \wedge f(Avranches)) \rightarrow v(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des prédicats

Exemple

$$\varphi: (p(Dax) \wedge f(Dax)) \vee (p(Avranches) \wedge f(Avranches)) \rightarrow v(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des prédicats
 $p(x)$ est vrai ssi $p_J(x) \in p_J$

Exemple

$$\varphi: (\text{true} \wedge f(Dax)) \vee (\text{true} \wedge f(Avranches)) \rightarrow v(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des prédicats
 $p(x)$ est vrai ssi $p_J(x) \in p_J$

Exemple

$$\varphi: (\top \wedge f(Dax)) \vee (\top \wedge f(Avranches)) \rightarrow v(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_j: \{s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe, \\ s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble \\ s_j(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_j = \{p_j(Avranches), p_j(Dax), p_j(Dieppe)\}$$

$$f_j = \{f_j(Dax), f_j(Dieppe), f_j(Grenoble)\}$$

$$v_j = \{v_j(Dax, Avranches), v_j(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des prédicats
 $f(x)$ est vrai ssi $f_j(x) \in f_j$

Exemple

$$\varphi: (\top \wedge \textcolor{brown}{\top}) \vee (\top \wedge \textcolor{violet}{\perp}) \rightarrow v(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{\textcolor{brown}{f_J(Dax)}, f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des prédicats
 $f(x)$ est vrai ssi $f_J(x) \in f_J$

Exemple

$$\varphi: (\top \wedge \top) \vee (\top \wedge \perp) \rightarrow v(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_j: \{s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe, \\ s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble \\ s_j(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_j = \{p_j(Avranches), p_j(Dax), p_j(Dieppe)\}$$

$$f_j = \{f_j(Dax), f_j(Dieppe), f_j(Grenoble)\}$$

$$v_j = \{v_j(Dax, Avranches), v_j(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des prédicats
 $v(x)$ est vrai ssi $v_j(x) \in v_j$

Exemple

$$\varphi: (\top \wedge \top) \vee (\top \wedge \perp) \rightarrow \textcolor{brown}{\top}$$

$$\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_j: \{s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe, \\ s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble \\ s_j(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_j = \{p_j(Avranches), p_j(Dax), p_j(Dieppe)\}$$

$$f_j = \{f_j(Dax), f_j(Dieppe), f_j(Grenoble)\}$$

$$v_j = \{\textcolor{brown}{v_j(Dax, Avranches)}, v_j(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des prédicats
 $v(x)$ est vrai ssi $v_j(x) \in v_j$

Exemple

$$\varphi: (T \wedge T) \vee (T \wedge \perp) \rightarrow T$$

φ est réduite à une formule propositionnelle

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$\varphi: (T \wedge T) \vee (T \wedge \perp) \rightarrow T$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des $\wedge$

Exemple

$$\varphi: \mathbf{T} \vee \mathbf{\perp} \longrightarrow \mathbf{T}$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \longrightarrow Dax, arrivee \longrightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation des $\wedge$

Exemple

$$\varphi: \top \vee \perp \longrightarrow \top$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \longrightarrow Dax, arrivee \longrightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation du $\vee$

Exemple

$\varphi: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$

$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$

$e(x) = Dax$

$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$

$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe,$
 $s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble$
 $s_J(Grenoble) = Dax\}$

$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$

$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$

$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$

Evaluation du v

Exemple

$$\varphi: T \rightarrow T$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Evaluation du $\rightarrow$

Exemple

φ : **T**

$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$

$e(x) = Dax$

$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$

$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe,$
 $s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble$
 $s_J(Grenoble) = Dax\}$

$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$

$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$

$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$

La formule φ est vraie
pour l'assignation.

Définition[Evaluation de terme]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $t \in \mathcal{T}$ un terme du premier ordre. L'**évaluation** de t par l'assignation $\mathcal{I}_e$, notée $[t]_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

Définition[Evaluation de terme]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $t \in \mathcal{T}$ un terme du premier ordre. L'**évaluation** de t par l'assignation $\mathcal{I}_e$, notée $[t]_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $t = c \in \mathcal{C}$ alors $[c]_{\mathcal{I}_e} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(c)$

L'évaluation d'une constante est sa valeur donnée par l'application $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$

Définition[Evaluation de terme]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $t \in \mathcal{T}$ un **terme** du premier ordre. L'**évaluation** de t par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $[t]_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $t = c \in \mathcal{C}$ alors $[c]_{\mathcal{I}_e} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(c)$
- Si $t = x \in \mathcal{X}$ alors $[t]_{\mathcal{I}_e} = e(x)$

L'évaluation d'une variable est sa valeur donnée par l'état d'interprétation e

Définition[Evaluation de terme]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $t \in \mathcal{T}$ un **terme** du premier ordre. L'**évaluation** de t par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $[t]_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $t = c \in \mathcal{C}$ alors $[c]_{\mathcal{I}_e} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(c)$
- Si $t = x \in \mathcal{X}$ alors $[t]_{\mathcal{I}_e} = e(x)$
- si $t = f \in \mathcal{F}$ alors $[f(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I}_e} = f_{\mathcal{I}}([t_1]_{\mathcal{I}_e}, \dots, [t_n]_{\mathcal{I}_e})$

L'évaluation d'une fonction f est donnée par l'application $f_{\mathcal{I}}$ appliquée à l'évaluation des termes composant ses paramètres.

Définition[Evaluation de terme]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $t \in \mathcal{T}$ un **terme** du premier ordre. L'**évaluation** de t par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $[t]_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $t = c \in \mathcal{C}$ alors $[c]_{\mathcal{I}_e} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(c)$
- Si $t = x \in \mathcal{X}$ alors $[t]_{\mathcal{I}_e} = e(x)$
- si $t = f \in \mathcal{F}$ alors $[f(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I}_e} = f_{\mathcal{I}}([t_1]_{\mathcal{I}_e}, \dots, [t_n]_{\mathcal{I}_e})$

Propriétés

- $\forall t \in \mathcal{T}, [t]_{\mathcal{I}_e} \in \Omega_{\mathcal{I}}$
- $[t]_{\mathcal{I}_e}$ dépend d'une **interprétation**, d'un **état** et d'un **domaine**

Définition[Evaluation de formule]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** du premier ordre. L'**évaluation** de φ par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

Définition[Evaluation de formule]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** du premier ordre. L'**évaluation** de φ par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ avec $p \in \mathcal{P}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = p_{\mathcal{I}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{I}_e}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{I}_e})$

Evaluation d'une formule atomique

Définition[Evaluation de formule]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** du premier ordre. L'**évaluation** de φ par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ avec $p \in \mathcal{P}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = p_{\mathcal{I}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{I}_e}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{I}_e})$
- Si $\varphi = \neg\psi$ avec $\psi \in \mathcal{L}_1$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \neg\llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$

Négation propositionnelle

Définition[Evaluation de formule]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** du premier ordre. L'**évaluation** de φ par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ avec $p \in \mathcal{P}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = p_{\mathcal{I}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{I}_e}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{I}_e})$
- Si $\varphi = \neg\psi$ avec $\psi \in \mathcal{L}_1$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \neg\llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$
- Si $\varphi = \alpha \oplus \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$ et $\oplus \in \mathcal{K}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{I}_e} \oplus \llbracket \beta \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$

Connecteur propositionnel

Définition[Evaluation de formule]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** du premier ordre. L'**évaluation** de φ par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ avec $p \in \mathcal{P}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = p_{\mathcal{I}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{I}_e}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{I}_e})$
- Si $\varphi = \neg\psi$ avec $\psi \in \mathcal{L}_1$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \neg\llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$
- Si $\varphi = \alpha \oplus \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$ et $\oplus \in \mathcal{K}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{I}_e} \oplus \llbracket \beta \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$
- Si $\varphi = \exists x \psi$ avec $\psi \in \mathcal{L}_1$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \top$ ssi $\exists \mathcal{I}_{e'} \llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{I}_{e'}} = \top$

Définition[Evaluation de formule]

Soit $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** du premier ordre. L'**évaluation** de φ par l'**assignation** $\mathcal{I}_e$, notée $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$ est définie telle que:

- Si $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ avec $p \in \mathcal{P}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = p_{\mathcal{I}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{I}_e}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{I}_e})$
- Si $\varphi = \neg\psi$ avec $\psi \in \mathcal{L}_1$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \neg\llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$
- Si $\varphi = \alpha \oplus \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$ et $\oplus \in \mathcal{K}$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{I}_e} \oplus \llbracket \beta \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$
- Si $\varphi = \exists x \psi$ avec $\psi \in \mathcal{L}_1$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \top$ ssi $\exists \mathcal{I}_{e'} \llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{I}_{e'}} = \top$
- Si $\varphi = \forall x \psi$ avec $\psi \in \mathcal{L}_1$ alors $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \top$ ssi $\forall \mathcal{I}_{e'} \llbracket \psi \rrbracket_{\mathcal{I}_{e'}} = \top$

Exemple

$$\varphi = (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x))$$

Quelle est la valeur de φ ?

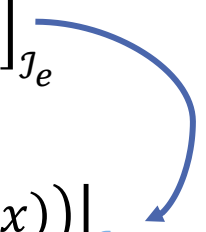
Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \left\llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \right\llbracket_{J_e}$$

Exemple

$$\begin{aligned}
 \llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} &= \left[(p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \right]_{J_e} \\
 \llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} &= \left[(p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \right]_{J_e} \rightarrow \left[v(x, s(x)) \right]_{J_e}
 \end{aligned}$$

$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket_{J_e} = \llbracket \alpha \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket_{J_e}$



Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \left\llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \right\rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \left\llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \right\rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \left\llbracket (p(x) \wedge f(x)) \right\rrbracket_{J_e} \vee \left\llbracket (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \right\rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{J_e} = \llbracket \alpha \rrbracket_{J_e} \vee \llbracket \beta \rrbracket_{J_e}$$

Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \rrbracket_{J_e} \vee \llbracket (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (\llbracket p(x) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(x) \rrbracket_{J_e}) \vee (\llbracket p(s(x)) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(s(x)) \rrbracket_{J_e}) \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \alpha \wedge \beta \rrbracket_{J_e} = \llbracket \alpha \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket \beta \rrbracket_{J_e}$$

Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \rrbracket_{J_e} \vee \llbracket (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket p(t) \rrbracket_{J_e} = p_J(\llbracket t \rrbracket_{J_e})$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (\llbracket p(x) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(x) \rrbracket_{J_e}) \vee (\llbracket p(s(x)) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(s(x)) \rrbracket_{J_e}) \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (p_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}) \wedge f_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e})) \vee (p_J(\llbracket s(x) \rrbracket_{J_e}) \wedge f_J(\llbracket s(x) \rrbracket_{J_e})) \rightarrow v_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}, \llbracket s(x) \rrbracket_{J_e})$$

Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \rrbracket_{J_e} \vee \llbracket (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket p(t) \rrbracket_{J_e} = p_J([t]_{J_e})$$

$$\llbracket f(t) \rrbracket_{J_e} = f_J([t]_{J_e})$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (\llbracket p(x) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(x) \rrbracket_{J_e}) \vee (\llbracket p(s(x)) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(s(x)) \rrbracket_{J_e}) \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (p_J([x]_{J_e}) \wedge f_J([x]_{J_e})) \vee (p_J([s(x)]_{J_e}) \wedge f_J([s(x)]_{J_e})) \rightarrow v_J([x]_{J_e}, [s(x)]_{J_e})$$

Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \rrbracket_{J_e} \vee \llbracket (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (\llbracket p(x) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(x) \rrbracket_{J_e}) \vee (\llbracket p(s(x)) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(s(x)) \rrbracket_{J_e}) \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (p_J([x]_{J_e}) \wedge f_J([x]_{J_e})) \vee (p_J([s(x)]_{J_e}) \wedge f_J([s(x)]_{J_e})) \rightarrow v_J([x]_{J_e}, [s(x)]_{J_e})$$

$$\llbracket p(t) \rrbracket_{J_e} = p_J([t]_{J_e})$$

$$\llbracket f(t) \rrbracket_{J_e} = f_J([t]_{J_e})$$

$$\llbracket v(t, u) \rrbracket_{J_e} = v_J([t]_{J_e}, [u]_{J_e})$$

Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rightarrow v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \vee (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = \llbracket (p(x) \wedge f(x)) \rrbracket_{J_e} \vee \llbracket (p(s(x)) \wedge f(s(x))) \rrbracket_{J_e} \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (\llbracket p(x) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(x) \rrbracket_{J_e}) \vee (\llbracket p(s(x)) \rrbracket_{J_e} \wedge \llbracket f(s(x)) \rrbracket_{J_e}) \rightarrow \llbracket v(x, s(x)) \rrbracket_{J_e}$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (p_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}) \wedge f_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e})) \vee (p_J(\llbracket s(x) \rrbracket_{J_e}) \wedge f_J(\llbracket s(x) \rrbracket_{J_e})) \rightarrow v_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}, \llbracket s(x) \rrbracket_{J_e})$$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{J_e} = (p_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}) \wedge f_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e})) \vee (p_J(s_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e})) \wedge f_J(s_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}))) \rightarrow v_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}, s_J(\llbracket x \rrbracket_{J_e}))$$

$$\llbracket s(t) \rrbracket_{J_e} = s_J(\llbracket t \rrbracket_{J_e})$$

Exemple

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \left(p_{\mathcal{I}}([x]_{\mathcal{I}_e}) \wedge f_{\mathcal{I}}([x]_{\mathcal{I}_e}) \right) \vee \left(p_{\mathcal{I}}(s_{\mathcal{I}}([x]_{\mathcal{I}_e})) \wedge f_{\mathcal{I}}(s_{\mathcal{I}}([x]_{\mathcal{I}_e})) \right) \rightarrow v_{\mathcal{I}}([x]_{\mathcal{I}_e}, s_{\mathcal{I}}([x]_{\mathcal{I}_e}))$$

Besoin de l'assignation $\mathcal{I}_e$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = \left(p_J([x]_{J_e}) \wedge f_J([x]_{J_e}) \right) \vee \left(p_J(s_J([x]_{J_e})) \wedge f_J(s_J([x]_{J_e})) \right) \rightarrow v_J([x]_{J_e}, s_J([x]_{J_e}))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: & \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax\} \end{aligned}$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = \left(p_J([x]_{J_e}) \wedge f_J([x]_{J_e}) \right) \vee \left(p_J(s_J([x]_{J_e})) \wedge f_J(s_J([x]_{J_e})) \right) \rightarrow v_J([x]_{J_e}, s_J([x]_{J_e}))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: & \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax\} \end{aligned}$$

$$[x]_{J_e} = e(x)$$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{j_e} = (p_j(Dax) \wedge f_j(Dax)) \vee (p_j(s_j(Dax)) \wedge f_j(s_j(Dax))) \rightarrow v_j(Dax, s_j(Dax))$$

$$\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j: \{ & s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe, \\ & s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble \\ & s_j(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

$$[x]_{j_e} = e(x)$$

$$p_j = \{p_j(Avranches), p_j(Dax), p_j(Dieppe)\}$$

$$f_j = \{f_j(Dax), f_j(Dieppe), f_j(Grenoble)\}$$

$$v_j = \{v_j(Dax, Avranches), v_j(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = (p_J(Dax) \wedge f_J(Dax)) \vee (p_J(s_J(Dax)) \wedge f_J(s_J(Dax))) \rightarrow v_J(Dax, s_J(Dax))$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

depart $\rightarrow$ *Dax*, *arrivee* $\rightarrow$ *Grenoble*

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

Valeurs des fonctions

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = (p_J(Dax) \wedge f_J(Dax)) \vee (p_J(Avranches) \wedge f_J(Avranches)) \rightarrow v_J(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

depart $\rightarrow$ Dax, *arrivee* $\rightarrow$ Grenoble

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

Valeurs des fonctions

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{J_e} = (p_j(Dax) \wedge f_j(Dax)) \vee (p_j(Avranches) \wedge f_j(Avranches)) \rightarrow v_j(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_j: \{s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe, \\ s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble \\ s_j(Grenoble) = Dax\}$$

Valeurs des prédicats

$$p_j = \{p_j(Avranches), p_j(Dax), p_j(Dieppe)\}$$

$$f_j = \{f_j(Dax), f_j(Dieppe), f_j(Grenoble)\}$$

$$v_j = \{v_j(Dax, Avranches), v_j(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{J_e} = (\top \wedge f_J(Dax)) \vee (\top \wedge f_J(Avranches)) \rightarrow v_J(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: \{ & s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

Valeurs des prédicats

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{J_e} = (\top \wedge f_j(Dax)) \vee (\top \wedge f_j(Avranches)) \rightarrow v_j(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j: \{ & s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe, \\ & s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble \\ & s_j(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

Valeurs des prédicats

$$p_j = \{p_j(Avranches), p_j(Dax), p_j(Dieppe)\}$$

$$f_j = \{f_j(Dax), f_j(Dieppe), f_j(Grenoble)\}$$

$$v_j = \{v_j(Dax, Avranches), v_j(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{J_e} = (\top \wedge \text{V}) \vee (\top \wedge \text{F}) \rightarrow v_J(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: \{ & s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

Valeurs des prédicats

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{J_e} = (\top \wedge \top) \vee (\top \wedge \perp) \rightarrow v_j(Dax, Avranches)$$

$$\Omega_j = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_j: \{s_j(Dax) = Avranches, s_j(Avranches) = Dieppe, \\ s_j(Dieppe) = Bourges, s_j(Bourges) = Grenoble \\ s_j(Grenoble) = Dax\}$$

Valeurs des prédicats

$$p_j = \{p_j(Avranches), p_j(Dax), p_j(Dieppe)\}$$

$$f_j = \{f_j(Dax), f_j(Dieppe), f_j(Grenoble)\}$$

$$v_j = \{v_j(Dax, Avranches), v_j(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = (\top \wedge \top) \vee (\top \wedge \perp) \rightarrow \top$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: \{ & s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

Valeurs des prédicats

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{\mathcal{I}_e} = (\top \wedge \top) \vee (\top \wedge \perp) \rightarrow \top$$

$$\Omega_{\mathcal{I}} = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{I}}: \{ & s_{\mathcal{I}}(Dax) = Avranches, s_{\mathcal{I}}(Avranches) = Dieppe, \\ & s_{\mathcal{I}}(Dieppe) = Bourges, s_{\mathcal{I}}(Bourges) = Grenoble \\ & s_{\mathcal{I}}(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

Formule propositionnelle

$$p_{\mathcal{I}} = \{p_{\mathcal{I}}(Avranches), p_{\mathcal{I}}(Dax), p_{\mathcal{I}}(Dieppe)\}$$

$$f_{\mathcal{I}} = \{f_{\mathcal{I}}(Dax), f_{\mathcal{I}}(Dieppe), f_{\mathcal{I}}(Grenoble)\}$$

$$v_{\mathcal{I}} = \{v_{\mathcal{I}}(Dax, Avranches), v_{\mathcal{I}}(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = (T \wedge T) \vee (T \wedge \perp) \rightarrow T$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

Evaluation des $\wedge$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = \textcolor{brown}{\top} \vee \textcolor{violet}{\perp} \rightarrow \top$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: \{ & s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

Evaluation des $\wedge$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{\mathcal{I}_e} = \top \vee \perp \rightarrow \top$$

$$\Omega_{\mathcal{I}} = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}: \{s_{\mathcal{I}}(Dax) = Avranches, s_{\mathcal{I}}(Avranches) = Dieppe, \\ s_{\mathcal{I}}(Dieppe) = Bourges, s_{\mathcal{I}}(Bourges) = Grenoble \\ s_{\mathcal{I}}(Grenoble) = Dax\}$$

Evaluation du $\vee$

$$p_{\mathcal{I}} = \{p_{\mathcal{I}}(Avranches), p_{\mathcal{I}}(Dax), p_{\mathcal{I}}(Dieppe)\}$$

$$f_{\mathcal{I}} = \{f_{\mathcal{I}}(Dax), f_{\mathcal{I}}(Dieppe), f_{\mathcal{I}}(Grenoble)\}$$

$$v_{\mathcal{I}} = \{v_{\mathcal{I}}(Dax, Avranches), v_{\mathcal{I}}(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$|\varphi|_{J_e} = \textcolor{brown}{T} \rightarrow \top$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J: \{ & s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ & s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ & s_J(Grenoble) = Dax \} \end{aligned}$$

Evaluation du V

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges) \}$$

Exemple

$$[\varphi]_{J_e} = \top \rightarrow \top$$

$$\Omega_J = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_J: \{s_J(Dax) = Avranches, s_J(Avranches) = Dieppe, \\ s_J(Dieppe) = Bourges, s_J(Bourges) = Grenoble \\ s_J(Grenoble) = Dax\}$$

Evaluation du $\rightarrow$

$$p_J = \{p_J(Avranches), p_J(Dax), p_J(Dieppe)\}$$

$$f_J = \{f_J(Dax), f_J(Dieppe), f_J(Grenoble)\}$$

$$v_J = \{v_J(Dax, Avranches), v_J(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{\mathcal{I}_e} = \textcolor{brown}{T}$$

$$\Omega_{\mathcal{I}} = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}: \{s_{\mathcal{I}}(Dax) = Avranches, s_{\mathcal{I}}(Avranches) = Dieppe, \\ s_{\mathcal{I}}(Dieppe) = Bourges, s_{\mathcal{I}}(Bourges) = Grenoble \\ s_{\mathcal{I}}(Grenoble) = Dax\}$$

Evaluation du $\rightarrow$

$$p_{\mathcal{I}} = \{p_{\mathcal{I}}(Avranches), p_{\mathcal{I}}(Dax), p_{\mathcal{I}}(Dieppe)\}$$

$$f_{\mathcal{I}} = \{f_{\mathcal{I}}(Dax), f_{\mathcal{I}}(Dieppe), f_{\mathcal{I}}(Grenoble)\}$$

$$v_{\mathcal{I}} = \{v_{\mathcal{I}}(Dax, Avranches), v_{\mathcal{I}}(Dieppe, Bourges)\}$$

Exemple

$$[\varphi]_{\mathcal{I}_e} = \top$$

$$\Omega_{\mathcal{I}} = \{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

$$e(x) = Dax$$

$$depart \rightarrow Dax, arrivee \rightarrow Grenoble$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}: \{s_{\mathcal{I}}(Dax) = Avranches, s_{\mathcal{I}}(Avranches) = Dieppe, \\ s_{\mathcal{I}}(Dieppe) = Bourges, s_{\mathcal{I}}(Bourges) = Grenoble \\ s_{\mathcal{I}}(Grenoble) = Dax\}$$

$$p_{\mathcal{I}} = \{p_{\mathcal{I}}(Avranches), p_{\mathcal{I}}(Dax), p_{\mathcal{I}}(Dieppe)\}$$

$$f_{\mathcal{I}} = \{f_{\mathcal{I}}(Dax), f_{\mathcal{I}}(Dieppe), f_{\mathcal{I}}(Grenoble)\}$$

$$v_{\mathcal{I}} = \{v_{\mathcal{I}}(Dax, Avranches), v_{\mathcal{I}}(Dieppe, Bourges)\}$$

La formule φ est vraie
pour l'assignation $\mathcal{I}_e$

Evaluation de formule

- Une **assignation** $\mathcal{I}_e$ est nécessaire uniquement lorsque la **formule à évaluer** contient au moins une **variable libre**
- Pour une formule close, une **assignation** $\mathcal{I}_e$ est nécessaire uniquement lorsque la **formule à évaluer** contient au moins une **variable libre**

Notation

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** et $\mathcal{I}_e$ une **assignation** sur le **domaine** $\Omega_{\mathcal{I}}$.

Il est possible de spécifier explicitement les valeurs prises par les **variables** lors de l'**évaluation** de φ en utilisant la notation:

$$[\varphi]_{\mathcal{I}_e[x_1=v_1, \dots, x_n=v_n]}$$

avec $x_i \in \mathcal{X}$, $v_i \in \Omega_{\mathcal{I}}$, $1 \leq i \leq n$

Définition[Satisfaction]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. Une assignation $\mathcal{I}_e$ satisfait φ si et seulement si $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \top$

Définition[Satisfaction]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. Une assignation $\mathcal{I}_e$ **satisfait** φ si et seulement si $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \top$

Définition[Modèle]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. Une assignation $\mathcal{I}_e$ **satisfaisant** φ est appelée **modèle** de φ et se note $\mathcal{I}_e \models \varphi$

Définition[Satisfaction]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. Une assignation $\mathcal{I}_e$ satisfait φ si et seulement si $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \top$

Définition[Modèle]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. Une assignation $\mathcal{I}_e$ satisfaisant φ est appelée modèle de φ et se note $\mathcal{I}_e \models \varphi$

Définition[Equivalence logique]

Deux formules $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_1$ sont logiquement équivalentes, noté $\varphi \equiv \psi$, si et seulement si pour toute assignation $\mathcal{I}_e$ on a :

$$\mathcal{I}_e \models \varphi \text{ et } \mathcal{I}_e \models \psi$$

Définition[Validité / Tautologie]

Une formule $\varphi \in \mathcal{L}_1$ est **valide** (ou est une **tautologie**), notée $\models \varphi$, si et seulement si toute **assignation** $\mathcal{I}_e$ est **modèle** de φ .

Définition[Validité / Tautologie]

Une formule $\varphi \in \mathcal{L}_1$ est **valide** (ou est une **tautologie**), notée $\models \varphi$, si et seulement si toute **assignation** $\mathcal{I}_e$ est **modèle** de φ .

Exemple

Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \{x\}$, $\mathcal{F} = \{f(x)\}$ avec $f_{\mathcal{I}}(x) = 2x$ et soit $\mathcal{P} = \{P(x)\}$ avec $P_{\mathcal{I}}(x) = \text{T}$ si et seulement si x est pair.

Définition[Validité / Tautologie]

Une formule $\varphi \in \mathcal{L}_1$ est **valide** (ou est une **tautologie**), notée $\models \varphi$, si et seulement si toute **assignation** $\mathcal{I}_e$ est **modèle** de φ .

Exemple

Soit $\Omega_f = \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \{x\}$, $\mathcal{F} = \{f(x)\}$ avec $f_f(x) = 2x$ et soit $\mathcal{P} = \{P(x)\}$ avec $P_f(x) = \top$ si et seulement si x est pair.

La formule $\forall x P(f(x))$ est une tautologie.

On peut écrire $\models \forall x P(f(x))$

Equivalences remarquables

Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_1$ des formules, $x \in \mathcal{X}$ une variable, $q \in \mathcal{Q}$ un quantificateur et $\oplus \in \mathcal{K}$ un connecteur logique

Equivalences remarquables

Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_1$ des formules, $x \in \mathcal{X}$ une variable, $q \in \mathcal{Q}$ un quantificateur et $\oplus \in \mathcal{K}$ un connecteur logique

■ $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$ et $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$ Commutativité de quantificateur

Equivalences remarquables

Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_1$ des formules, $x \in \mathcal{X}$ une variable, $q \in \mathcal{Q}$ un quantificateur et $\oplus \in \mathcal{K}$ un connecteur logique

$$\blacksquare \quad \forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi \text{ et } \exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$$

Commutativité de quantificateur

$$\blacksquare \quad \forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi \text{ et } \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

$$\blacksquare \quad \exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi \text{ et } \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$$

Négation de quantificateur

Equivalences remarquables

Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_1$ des formules, $x \in \mathcal{X}$ une variable, $q \in \mathcal{Q}$ un quantificateur et $\oplus \in \mathcal{K}$ un connecteur logique

$$\blacksquare \quad \forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi \text{ et } \exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$$

Commutativité de quantificateur

$$\blacksquare \quad \forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi \text{ et } \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

$$\blacksquare \quad \exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi \text{ et } \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$$

Négation de quantificateur

$$\blacksquare \quad \exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi$$

$$\blacksquare \quad \forall x (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$$

Distributivité de quantificateur

Equivalences remarquables

Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_1$ des formules, $x \in \mathcal{X}$ une variable, $q \in \mathcal{Q}$ un quantificateur et $\oplus \in \mathcal{K}$ un connecteur logique

- $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$ et $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$ Commutativité de quantificateur
- $\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$ et $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$
- $\exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi$ et $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$ Néigation de quantificateur
- $\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi$
- $\forall x (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$ Distributivité de quantificateur
- $\psi \oplus qx \varphi \equiv qx \psi \oplus \varphi$, si x n'est pas une variable libre de ψ

Interprétation finie

Soit Ω_f un domaine d'interprétation fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule close

Interprétation finie

Soit Ω_f un **domaine d'interprétation** fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule close**

- Peut-on représenter φ **sans ses quantificateurs** ?
- Peut-on représenter φ **sans ses variables** ?

Interprétation finie

Soit Ω_f un **domaine d'interprétation** fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule close**

- Peut-on représenter φ **sans ses quantificateurs** ?
- Peut-on représenter φ **sans ses variables** ?

Exemple

Soit $\Omega_f = \{a, b, c\}$ et $\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

Interprétation finie

Soit Ω_I un **domaine d'interprétation** fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule close**

- Peut-on représenter φ **sans ses quantificateurs** ?
- Peut-on représenter φ **sans ses variables** ?

Exemple

Soit $\Omega_I = \{a, b, c\}$ et $\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

$$\exists x P(x) = \top \text{ ssi } [P(x)]_{I_{e\langle x=a \rangle}} = \top \text{ ou } [P(x)]_{I_{e\langle x=b \rangle}} \text{ ou } [P(x)]_{I_{e\langle x=c \rangle}}$$

Interprétation finie

Soit Ω_I un **domaine d'interprétation** fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule close**

- Peut-on représenter φ **sans ses quantificateurs** ?
- Peut-on représenter φ **sans ses variables** ?

Exemple

Soit $\Omega_I = \{a, b, c\}$ et $\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

On peut écrire $\varphi = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \rightarrow \forall y Q(y)$

$$\exists x P(x) = \top \text{ ssi } [P(x)]_{I_e \langle x=a \rangle} = \top \text{ ou } [P(x)]_{I_e \langle x=b \rangle} \text{ ou } [P(x)]_{I_e \langle x=c \rangle}$$

Interprétation finie

Soit Ω_I un **domaine d'interprétation** fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule close**

- Peut-on représenter φ **sans ses quantificateurs** ?
- Peut-on représenter φ **sans ses variables** ?

Exemple

Soit $\Omega_I = \{a, b, c\}$ et $\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

On peut écrire $\varphi = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \rightarrow \forall y Q(y)$

$$\forall y Q(y) = \top \text{ ssi } [Q(y)]_{I_e \langle x=a \rangle} = \top \text{ et } [Q(y)]_{I_e \langle x=b \rangle} \text{ et } [Q(y)]_{I_e \langle x=c \rangle}$$

Interprétation finie

Soit Ω_I un **domaine d'interprétation** fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule close**

- Peut-on représenter φ **sans ses quantificateurs** ?
- Peut-on représenter φ **sans ses variables** ?

Exemple

Soit $\Omega_I = \{a, b, c\}$ et $\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

On peut écrire $\varphi = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \rightarrow Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c)$

$$\forall y Q(y) = \top \text{ ssi } [Q(y)]_{I_{e\langle x=a \rangle}} = \top \text{ et } [Q(y)]_{I_{e\langle x=b \rangle}} \text{ et } [Q(y)]_{I_{e\langle x=c \rangle}}$$

Interprétation finie

Soit Ω_f un **domaine d'interprétation** fini dénombrable de taille n et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule close**

- Peut-on représenter φ **sans ses quantificateurs** ?
- Peut-on représenter φ **sans ses variables** ?

Exemple

Soit $\Omega_f = \{a, b, c\}$ et $\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$ Equivalence

On peut écrire $\varphi = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \rightarrow Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c)$

Définition[**Instanciation**]

Soit Ω_f un **domaine d'interprétation** fini dénombrable, soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** et soit t un **terme**. On appelle **instanciation** de φ , notée $\varphi_{\langle x:=t \rangle}$ la formule telle que:

Définition[**Instanciation**]

Soit Ω_f un **domaine d'interprétation** fini dénombrable, soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** et soit t un **terme**. On appelle **instanciation** de φ , notée $\varphi_{\langle x:=t \rangle}$ la formule telle que:

- $\varphi_{\langle x:=t \rangle}$ est la formule obtenue en remplaçant toute occurrence libre de x par t
- t est libre pour x dans φ (aucune variable de t n'est liée dans φ après remplacement)

Exemple

- Soit $\varphi: \forall x P(x) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

Exemple

- Soit $\varphi: \forall x P(x) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x := s(y) \rangle}$ est:

$$\forall x P(x) \vee Q(s(y))$$

Le x de $P(x)$ n'est pas libre et ne peut être remplacé!

Exemple

- Soit $\varphi: \forall x P(x) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

$$\forall x P(x) \vee Q(s(y))$$

- Soit $\varphi: \exists y P(x, z) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

Exemple

- Soit $\varphi: \forall x P(x) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

$$\forall x P(x) \vee Q(s(y))$$

- Soit $\varphi: \exists y P(x, z) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

$$\exists y P(s(y), z) \vee Q(s(y))$$

Exemple

- Soit $\varphi: \forall x P(x) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

$$\forall x P(x) \vee Q(s(y))$$

- Soit $\varphi: \exists y P(x, z) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ n'est pas:

$$\exists y P(s(y), z) \vee Q(s(y))$$

Le y dans $s(y)$ est capturé par le $\exists y$
(y n'est pas libre pour s dans φ)

Exemple

- Soit $\varphi: \forall x P(x) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

$$\forall x P(x) \vee Q(s(y))$$

- Soit $\varphi: \exists y P(x, z) \vee Q(x)$. L'instanciation $\varphi_{\langle x:=s(y) \rangle}$ est:

$$\exists y P(x, z) \vee Q(s(y))$$

Théorème[Instanciatiion]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule et soit t un terme libre pour la variable x dans φ . Pour toute assignation $\mathcal{I}_e$:

$$\llbracket \varphi_{\langle x:=t \rangle} \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e[x=v]} \text{ avec } v = \llbracket t \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$$

Théorème[Instanciatiion]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule et soit t un terme libre pour la variable x dans φ . Pour toute assignation $\mathcal{I}_e$:

$$\llbracket \varphi_{\langle x:=t \rangle} \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e[x=v]} \text{ avec } v = \llbracket t \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$$

L'instanciation ne change pas
le sens de la formule

Théorème[Instanciatiion]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule et soit t un terme libre pour la variable x dans φ . Pour toute assignation $\mathcal{I}_e$:

$$\llbracket \varphi_{\langle x:=t \rangle} \rrbracket_{\mathcal{I}_e} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}_e[x=v]} \text{ avec } v = \llbracket t \rrbracket_{\mathcal{I}_e}$$

Corolaire

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule et soit t un terme libre pour la variable x dans φ . Les formules

$$\blacksquare \forall x \varphi \rightarrow \varphi_{\langle x:=t \rangle} \quad \blacksquare \varphi_{\langle x:=t \rangle} \rightarrow \exists x \varphi$$

sont valides (tautologies)

Définition[Expansion]

Soit Ω_I un domaine d'interprétation fini dénombrable, soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. L'expansion de φ est la formule obtenue en remplaçant:

Définition[Expansion]

Soit Ω_f un domaine d'interprétation fini dénombrable, soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. L'expansion de φ est la formule obtenue en remplaçant:

- Toute sous-formule de φ de la forme $\forall x \psi$ par:

$$\bigwedge_{v \in \Omega_f} \psi_{\langle x := v \rangle}$$

Conjonction d'instanciations

Définition[Expansion]

Soit Ω_f un domaine d'interprétation fini dénombrable, soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule. L'expansion de φ est la formule obtenue en remplaçant:

- Toute sous-formule de φ de la forme $\forall x \psi$ par:

$$\bigwedge_{v \in \Omega_f} \psi_{\langle x := v \rangle}$$

- Toute sous-formule de φ de la forme $\exists x \psi$ par:

$$\bigvee_{v \in \Omega_f} \psi_{\langle x := v \rangle}$$

Disjonction d'instanciations

Exemple

Soit $\Omega_f = \{0, 1\}$ un domaine d'interprétation et soit

$$\varphi: \exists x P(x) \longrightarrow \forall y \exists z Q(y, z)$$

L'expansion de φ est:

Exemple

Soit $\Omega_f = \{0, 1\}$ un domaine d'interprétation et soit

$$\varphi: \exists x P(x) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z)$$

L'expansion de φ est:

$$P(0) \vee P(1) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z)$$

$$\bigvee_{v \in \Omega_f} \psi_{\langle x:=v \rangle}$$

Exemple

Soit $\Omega_f = \{0, 1\}$ un **domaine d'interprétation** et soit

$$\varphi: \exists x P(x) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z)$$

L'expansion de φ est:

$$P(0) \vee P(1) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z) \quad \bigvee_{v \in \Omega_f} \psi_{\langle x:=v \rangle}$$

$$P(0) \vee P(1) \rightarrow \forall y (Q(y, 0) \vee Q(y, 1))$$

Respect des priorités

Exemple

Soit $\Omega_f = \{0, 1\}$ un **domaine d'interprétation** et soit

$$\varphi: \exists x P(x) \longrightarrow \forall y \exists z Q(y, z)$$

L'expansion de φ est:

$$\begin{aligned}
 &P(0) \vee P(1) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z) \\
 &P(0) \vee P(1) \rightarrow \forall y (Q(y, 0) \vee Q(y, 1)) \quad \bigwedge_{v \in \Omega_f} \psi_{\langle x:=v \rangle} \\
 &P(0) \vee P(1) \rightarrow (Q(0, 0) \vee Q(0, 1)) \wedge (Q(1, 0) \vee Q(1, 1))
 \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\Omega_f = \{0, 1\}$ un **domaine d'interprétation** et soit

$$\varphi: \exists x P(x) \longrightarrow \forall y \exists z Q(y, z)$$

L'expansion de φ est:

$$P(0) \vee P(1) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z)$$

$$P(0) \vee P(1) \rightarrow \forall y (Q(y, 0) \vee Q(y, 1))$$

$$P(0) \vee P(1) \rightarrow (Q(0,0) \vee Q(0,1)) \wedge (Q(1,0) \vee Q(1,1))$$

L'expansion d'une formule close sans fonction ni constante donne une formule composée uniquement de prédicats et de connecteurs propositionnels

Définition[Interprétation propositionnelle]

Soit Ω_f un domaine d'interprétation fini dénombrable, soit $\mathcal{P}$ un ensemble de prédicats et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule obtenue par expansion. On appelle **interprétation propositionnelle** de φ , notée ω , une valuation dans $\{\top, \perp\}$ de chaque instance de prédicat $p \in \mathcal{P}$

Définition[Interprétation propositionnelle]

Soit Ω_f un domaine d'interprétation fini dénombrable, soit $\mathcal{P}$ un ensemble de prédicats et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une formule obtenue par expansion. On appelle interprétation propositionnelle de φ , notée ω , une valuation dans $\{\top, \perp\}$ de chaque instance de prédicat $p \in \mathcal{P}$

Exemple

$\varphi: P(0) \vee P(1) \rightarrow (Q(0,0) \vee Q(0,1)) \wedge (Q(1,0) \vee Q(1,1))$

	$P(0)$	$P(1)$	$Q(0,0)$	$Q(0,1)$	$Q(1,0)$	$Q(1,1)$
ω	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$

Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un **domaine d'interprétation** fini dénombrable, soit $\mathcal{P}$ un ensemble de **prédicats** et soit $\varphi \in \mathcal{L}_1$ une **formule** obtenue par **expansion**. On appelle **interprétation propositionnelle** de φ , notée ω , une valuation dans $\{\top, \perp\}$ de chaque instance de prédicat $p \in \mathcal{P}$

Example

$$\varphi: P(0) \vee P(1) \rightarrow (Q(0,0) \vee Q(0,1)) \wedge (Q(1,0) \vee Q(1,1))$$

	$P(0)$	$P(1)$	$Q(0,0)$	$Q(0,1)$	$Q(1,0)$	$Q(1,1)$
ω	T	⊥	T	T	⊥	T